

矩阵计算与优化

Matrix Computation and Optimization

吕月明

南京大学智能科学与技术学院



第 2 章 矩阵的标准形与特征值计算

λ -矩阵及标准形、不变因子和初等因子

定义

设 $f(x), g(x)$ 是复数域 C 上的多项式, 如果存在 C 上的多项式 $h(x)$, 使

$$f(x) = g(x)h(x),$$

则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$, 记作 $g(x) \mid f(x)$.

定义

设 $f(x), g(x)$ 是复数域 C 上的多项式, 如果存在 C 上的多项式 $h(x)$, 使

$$f(x) = g(x)h(x),$$

则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$, 记作 $g(x) \mid f(x)$.

此时称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式 (或因子), $f(x)$ 称为 $g(x)$ 的倍式.

定义

设 $f(x), g(x)$ 是复数域 C 上多项式, 如果存在多项式 $d(x)$ 满足:

(i) $d(x)|f(x), d(x)|g(x)$;

定义

设 $f(x), g(x)$ 是复数域 C 上多项式, 如果存在多项式 $d(x)$ 满足:

- (i) $d(x) | f(x), d(x) | g(x)$;
- (ii) 若 $d_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式, 则必有

$$d_1(x) | d(x) ,$$

定义

设 $f(x), g(x)$ 是复数域 C 上多项式, 如果存在多项式 $d(x)$ 满足:

- (i) $d(x) | f(x), d(x) | g(x)$;
- (ii) 若 $d_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式, 则必有

$$d_1(x) | d(x) ,$$

则称 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的一个最大公因式.

性质

用 $(f(x), g(x))$ 表示首项系数为 1 的最大公因式.

性质

用 $(f(x), g(x))$ 表示首项系数为 1 的最大公因式.

若 c 为非零常数, $f(x)$ 是首 1 多项式, 则有:

$$(f(x), c) = 1, (f(x), 0) = f(x).$$

定义

设 $a_{ij}(\lambda) (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 为复数域 C 上的多项式, 则称以 $a_{ij}(\lambda)$ 为元素的 $m \times n$ 阶矩阵

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

为 λ -矩阵或多项式矩阵.

定义

如果 λ -矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 中有一个 r 阶 ($r \geq 1$) 子式为非零多项式, 而所有 $r+1$ 阶子式 (如果有的话) 全为零多项式,

定义

如果 λ -矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 中有一个 r 阶 ($r \geq 1$) 子式为非零多项式, 而所有 $r+1$ 阶子式 (如果有的话) 全为零多项式, 则称 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的秩为 r ,

定义

如果 λ -矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 中有一个 r 阶 ($r \geq 1$) 子式为非零多项式, 而所有 $r+1$ 阶子式 (如果有的话) 全为零多项式, 则称 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的秩为 r , 记作

$$\text{rank } A(\lambda) = r \text{ 或 } r_{A(\lambda)} = r.$$

定义

如果 λ -矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 中有一个 r 阶 ($r \geq 1$) 子式为非零多项式, 而所有 $r+1$ 阶子式 (如果有的话) 全为零多项式, 则称 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的秩为 r , 记作

$$\text{rank } A(\lambda) = r \text{ 或 } r_{A(\lambda)} = r.$$

零矩阵的秩规定为零.

定义

如果 n 阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 秩为 n , 即 $\det A(\lambda) \neq 0$, 则称 $A(\lambda)$ 为满秩的或非奇异的.

定义

如果 n 阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 秩为 n , 即 $\det A(\lambda) \neq 0$, 则称 $A(\lambda)$ 为满秩的或非奇异的.

若 n 阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的秩小于 n , 也即 $\det A(\lambda) = 0$, 就称 $A(\lambda)$ 是降秩的或奇异的.

定义

初等行 (列) 变换

(a) 交换两行 (列), $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j$ ($\mathbf{c}_i \leftrightarrow \mathbf{c}_j$) ;

定义

初等行 (列) 变换

(a) 交换两行 (列), $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j$ ($\mathbf{c}_i \leftrightarrow \mathbf{c}_j$);

(b) 数 $k \neq 0$ 乘某行 (列) 的所有元素, $r_i \times k$ ($c_i \times k$);

定义

初等行 (列) 变换

(a) 交换两行 (列), $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j (\mathbf{c}_i \leftrightarrow \mathbf{c}_j)$;

(b) 数 $k \neq 0$ 乘某行 (列) 的所有元素, $r_i \times k (\mathbf{c}_i \times k)$;

(c) 某行 (列) 元素的 $\varphi(\lambda)$ 倍加到另一行 (列) 对应元素上去,
 $\mathbf{r}_i + \varphi(\lambda)\mathbf{r}_j (\mathbf{c}_i + \varphi(\lambda)\mathbf{c}_j)$.

定义

如果 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 经过有限次初等变换变为 λ -矩阵 $B(\lambda)$, 则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价, 记作

$$A(\lambda) \simeq B(\lambda) .$$

定理

任一非零的 λ -矩阵 $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))_{m \times n}$ 都等价于如下形式的矩阵:

$$A(\lambda) \simeq S(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $r \geq 1$ 是 $A(\lambda)$ 的秩, $d_i(\lambda) (i = 1, 2, \dots, r)$ 是首项系数为 1 的多项式, 且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$, $i = 1, \dots, r-1$.

定理

λ -矩阵 $S(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 Smith 标准形,
 $d_i(\lambda)(i = 1, 2, \dots, r)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子 (或不变因式).

例

求 λ -矩阵

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2\lambda - 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1 + \lambda^2 & \lambda^2 + \lambda - 1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

的 Smith 标准形和不变因子.

解:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2\lambda - 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1 + \lambda^2 & \lambda^2 + \lambda - 1 & -\lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda - 1 + \lambda^2 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1 + \lambda^2 & \lambda^2 + \lambda - 1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

解:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda-1+\lambda^2 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda^2 \\ 0 & -\lambda^2-\lambda & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

解:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda-1+\lambda^2 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda^2 \\ 0 & -\lambda^2-\lambda & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda^3+\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

解:

得所求的 Smith 标准形

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + \lambda \end{pmatrix}$$

解:

得所求的 Smith 标准形

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + \lambda \end{pmatrix}$$

不变因子为

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = \lambda, d_3(\lambda) = \lambda^3 + \lambda.$$

定义

设 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 $r \geq 1$, 对于正整数 $k(1 \leq k \leq r)$, $A(\lambda)$ 中的所有非零的 k 阶子式的首一最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子.

定理

λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的 Smith 标准形

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_r(\lambda) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

是唯一的, 且

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda), d_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}, k = 2, \dots, r.$$

定义

把 λ -矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的每个次数不小于 1 的不变因子 $\mathbf{d}_k(\lambda)$ 在复数域上分解为互不相同的一次因式的方幂的乘积,

定义

把 λ -矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的每个次数不小于 1 的不变因子 $\mathbf{d}_k(\lambda)$ 在复数域上分解为互不相同的一次因式的方幂的乘积, 所有这些一次因式的方幂 (相同的按出现的次数计算), 称为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的初等因子,

定义

把 λ -矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的每个次数不小于 1 的不变因子 $\mathbf{d}_k(\lambda)$ 在复数域上分解为互不相同的一次因式的方幂的乘积, 所有这些一次因式的方幂 (相同的按出现的次数计算), 称为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的初等因子, 全体初等因子的集合称为初等因子组.

定理

设 λ -矩阵

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} B(\lambda) & 0 \\ 0 & C(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中 $B(\lambda)$ 为 $m \times n$ 阶 λ 矩阵, $C(\lambda)$ 为 $p \times l$ 阶 λ -矩阵, 则 $B(\lambda), C(\lambda)$ 的各个初等因子的全体是 $A(\lambda)$ 的全部初等因子.

Jordan 标准形

定义

设 $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$, 则其特征矩阵 $\lambda I - A$ 的不变因子、行列式因子、初等因子分别称为 A 的不变因子、行列式因子、初等因子.

定义

形如

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i \times r_i}$$

的矩阵称为 r_i 阶 Jordan 块,

定义

由若干个 Jordan 块构成的分块对角矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_s \end{pmatrix}$$

称为 Jordan 标准形.

Jordan 定理

设 $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$, 则 A 与一个 Jordan 标准形相似, 并且这个 Jordan 标准形除了其中 Jordan 块的排列次序外被 A 唯一决定, 常称其为 A 的 Jordan 标准形, 并记为 J_A .

如何确定 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准形 $\mathbf{J}_\mathbf{A}$ 和相似变换矩阵 $\mathbf{P}$?

第一步, 求出 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的初等因子:

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{n_s},$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 可能有相同的, 指数 $n_1, n_2, \dots, n_s$ 也可能有相同的, 且 $\sum_{i=1}^s n_i = n$.

如何确定 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准形 $\mathbf{J}_\mathbf{A}$ 和相似变换矩阵 $\mathbf{P}$?

第一步, 求出 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的初等因子:

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{n_s},$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 可能有相同的, 指数 $n_1, n_2, \dots, n_s$ 也可能有相同的, 且 $\sum_{i=1}^s n_i = n$.

完成这一步, 有三种方法:

(i) 用初等变换化特征矩阵 $\lambda I - A$ 为 Smith 标准形, 求出 A 的不变因子 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$ (因 $\text{rank}(\lambda I - A) = n$, 所以 A 有 n 个不变因子),

(i) 用初等变换化特征矩阵 $\lambda I - A$ 为 Smith 标准形, 求出 A 的不变因子 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$ (因 $\text{rank}(\lambda I - A) = n$, 所以 A 有 n 个不变因子),

再将次数大于 0 的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积, 即可得 A 的初等因子.

(ii) 用初等变换化 $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$ 为对角形

$$\text{diag}(f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda))$$

(ii) 用初等变换化 $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$ 为对角形

$$\text{diag}(f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda))$$

再将 $f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$ 分解成一次因式的方幂, 即可得初等因子.

(iii) 直接求出 $\lambda I - A$ 的行列式因子

$$D_1(\lambda), \dots, D_n(\lambda),$$

(iii) 直接求出 $\lambda I - A$ 的行列式因子

$$D_1(\lambda), \dots, D_n(\lambda),$$

由此求出 A 的不变因子再分解, 从而得到 A 的初等因子.

(iii) 直接求出 $\lambda I - A$ 的行列式因子

$$D_1(\lambda), \dots, D_n(\lambda),$$

由此求出 A 的不变因子再分解, 从而得到 A 的初等因子.

(i)、(ii) 称为初等变换法, (iii) 称为行列式因子法.

第二步, 写出每个初等因子 $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) 对应的 Jordan 块

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

第三步, 写出以这些 Jordan 块构成的 Jordan 标准形

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}.$$

即为 A 的 Jordan 标准形.

例

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形.

解: 用初等变换法, 因

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ \lambda - 4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

解: 用初等变换法, 因

$$\begin{aligned}\lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ \lambda - 4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 2)^2 & 0 \\ 0 & -(\lambda - 2) & \lambda - 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

解: 用初等变换法, 因

$$\begin{aligned}\lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ \lambda - 4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 2)^2 & 0 \\ 0 & -(\lambda - 2) & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

解: 可见 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = \lambda - 2, d_3(\lambda) = (\lambda - 2)^2,$$

解: 可见 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = \lambda - 2, d_3(\lambda) = (\lambda - 2)^2,$$

所以, A 的初等因子为 $\lambda - 2, (\lambda - 2)^2$.

解: 可见 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = \lambda - 2, d_3(\lambda) = (\lambda - 2)^2,$$

所以, A 的初等因子为 $\lambda - 2, (\lambda - 2)^2$.

故 A 的 Jordan 标准形为

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

例

求下列矩阵的 Jordan 标准形:

$$(i) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(ii) B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解: 用行列式因子法. (i) 因

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -6 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix},$$

解: 用行列式因子法. (i) 因

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -6 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix},$$

显然有 $\mathbf{D}_3(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 4)$,

解: 用行列式因子法. (i) 因

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -6 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix},$$

显然有 $D_3(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 4)$, 又 $\lambda I - A$ 中有二阶子式

$$D_{13} = \begin{vmatrix} -6 & \lambda - 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

解: 因为 $D_2(\lambda)$ 整除每个二阶子式, 且 $D_2(\lambda) \mid D_3(\lambda)$,

解: 因为 $D_2(\lambda)$ 整除每个二阶子式, 且 $D_2(\lambda) \mid D_3(\lambda)$, 所以 $D_2(\lambda) = 1$, 从而 $D_1(\lambda) = 1$.

解: 因为 $D_2(\lambda)$ 整除每个二阶子式, 且 $D_2(\lambda) \mid D_3(\lambda)$, 所以 $D_2(\lambda) = 1$, 从而 $D_1(\lambda) = 1$. 于是 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1$$

$$d_3(\lambda) = \frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 4).$$

解: 得 A 的初等因子为 $(\lambda + 1)^2, (\lambda - 4)$.

解: 得 A 的初等因子为 $(\lambda + 1)^2, (\lambda - 4)$. 故 A 的 Jordan 标准形为

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

解: (ii) 因

$$\lambda I - B = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 7 & 6 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

解: (ii) 因

$$\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 7 & 6 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

易得 $\mathbf{D}_4(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}) = (\lambda - 1)^4$.

解: 又可找到 $\lambda I - B$ 中的两个三阶子式

$$D_{44} = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 0 \\ -7 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2.$$

$$D_{23} = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ -7 & -1 & -1 \\ 7 & 6 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda - 11.$$

解: 因 $((\lambda - 2)(\lambda - 1)^2, -\lambda^2 + 2\lambda - 11) = 1$, 所以 $D_3(\lambda) = 1$,
进而有 $D_2(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$.

解: 因 $((\lambda - 2)(\lambda - 1)^2, -\lambda^2 + 2\lambda - 11) = 1$, 所以 $D_3(\lambda) = 1$,
进而有 $D_2(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$.
所以 B 的不变因子为

解: 因 $((\lambda - 2)(\lambda - 1)^2, -\lambda^2 + 2\lambda - 11) = 1$, 所以 $D_3(\lambda) = 1$,
进而有 $D_2(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$.
所以 B 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = d_3(\lambda) = 1, d_4(\lambda) = (\lambda - 1)^4.$$

解: 于是 A 的初等因子为 $(\lambda - 1)^4$, 故 B 的 Jordan 标准形为

$$J_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例

求矩阵 A 的 Jordan 标准形及相似变换矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

例

求矩阵 A 的 Jordan 标准形及相似变换矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

解：因

$$\lambda I - A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \end{pmatrix}$$

解: 则 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = 1, d_3(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2),$$

解: 则 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = 1, d_3(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2),$$

所以 A 的初等因子为 $(\lambda - 1)^2, \lambda - 2$.

解: 则 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = 1, d_3(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2),$$

所以 A 的初等因子为 $(\lambda - 1)^2, \lambda - 2$.

故 A 的 Jordan 标准形为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

解: 设相似变换矩阵 $P = (p_1, p_2, p_3)$, 由 $P^{-1}AP = J$, 即 $AP = PJ$ 得

$$\begin{cases} Ap_1 = p_1 \\ Ap_2 = p_1 + p_2 \\ Ap_3 = 2p_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} (I - A)p_1 = 0 \\ (I - A)p_2 = -p_1 \\ (2I - A)p_3 = 0 \end{cases}$$

解: 设相似变换矩阵 $P = (p_1, p_2, p_3)$, 由 $P^{-1}AP = J$, 即 $AP = PJ$ 得

$$\begin{cases} Ap_1 = p_1 \\ Ap_2 = p_1 + p_2 \\ Ap_3 = 2p_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} (I - A)p_1 = 0 \\ (I - A)p_2 = -p_1 \\ (2I - A)p_3 = 0 \end{cases}$$

可见 p_1 为特征值 1 的特征向量, $p_1 = (1, -1, 2)^T$,

解: 设相似变换矩阵 $P = (p_1, p_2, p_3)$, 由 $P^{-1}AP = J$, 即 $AP = PJ$ 得

$$\begin{cases} Ap_1 = p_1 \\ Ap_2 = p_1 + p_2 \\ Ap_3 = 2p_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} (I - A)p_1 = 0 \\ (I - A)p_2 = -p_1 \\ (2I - A)p_3 = 0 \end{cases}$$

可见 p_1 为特征值 1 的特征向量, $p_1 = (1, -1, 2)^T$,
 p_3 为特征值 2 的特征向量, $p_3 = (0, 1, 0)^T$.

解: 设相似变换矩阵 $P = (p_1, p_2, p_3)$, 由 $P^{-1}AP = J$, 即 $AP = PJ$ 得

$$\begin{cases} Ap_1 = p_1 \\ Ap_2 = p_1 + p_2 \\ Ap_3 = 2p_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} (I - A)p_1 = 0 \\ (I - A)p_2 = -p_1 \\ (2I - A)p_3 = 0 \end{cases}$$

可见 p_1 为特征值 1 的特征向量, $p_1 = (1, -1, 2)^T$,
 p_3 为特征值 2 的特征向量, $p_3 = (0, 1, 0)^T$.
求解 $(I - A)x = -p_1$ 可得 p_2 .

解: 由

$$(I - A, -p_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解: 由

$$(I - A, -p_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得通解

$$x = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T + k\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T \quad (k \in \mathbb{C})$$

解: 由

$$(I - A, -p_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得通解

$$x = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T + k\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T \quad (k \in \mathbb{C})$$

取 $k = 1$, 得 $p_2 = (0, -1, 1)^T$.

解: 由

$$(I - A, -p_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得通解

$$x = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T + k\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T \quad (k \in \mathbb{C})$$

取 $k = 1$, 得 $p_2 = (0, -1, 1)^T$. 从而

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Takeaways:

1. λ -矩阵基本概念：秩、初等变换、等价，Smith 标准形求解；
2. 三大因子：行列式因子、不变因子、初等因子，三者关系；
3. Jordan 标准形：复方阵的相似标准形，三步求解法。

END
of
Chapter 2