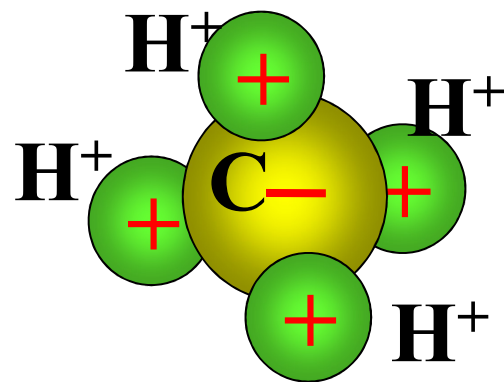


§ 7-8 静电场中的电介质

	金属	电介质
导电性能	极强（近似为理想导体）	极弱（近似为理想绝缘体）
电子态	自由电子，自由移动距离无穷大	束缚电子，只能在原子大小范围内移动
静电平衡时	外电场与极化电场完全抵消，内部电场为零。	极化电场只能部分抵消外电场

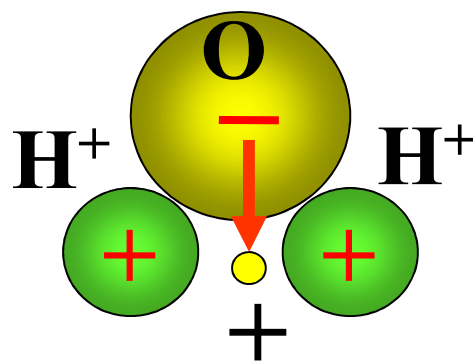
正负电荷中心图示

无极分子:

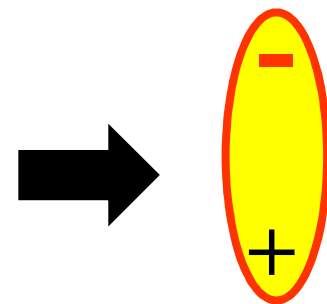


CH_4 (甲烷)

有极分子:



H_2O

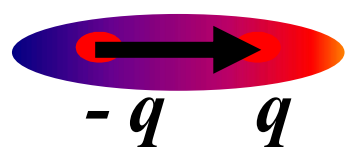


电偶极子

静电场中的电介质

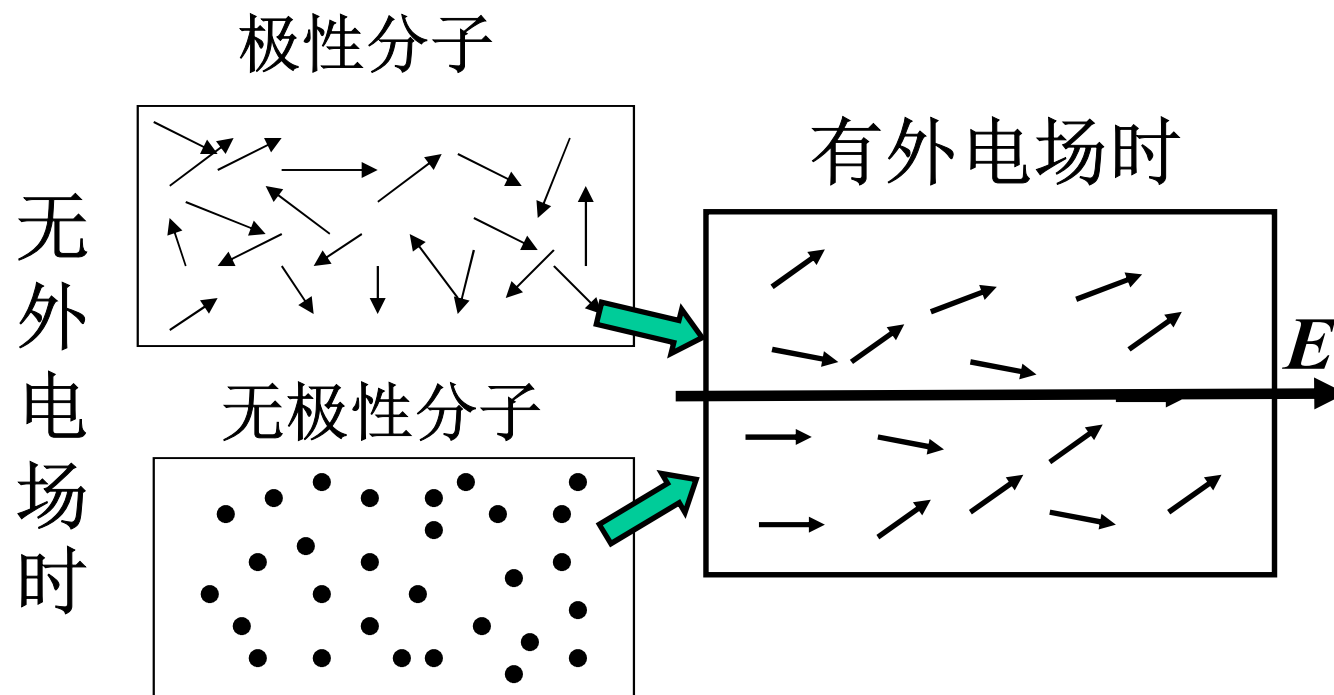
1. 电介质的极化

概念：分子取向极化，电子位移极化

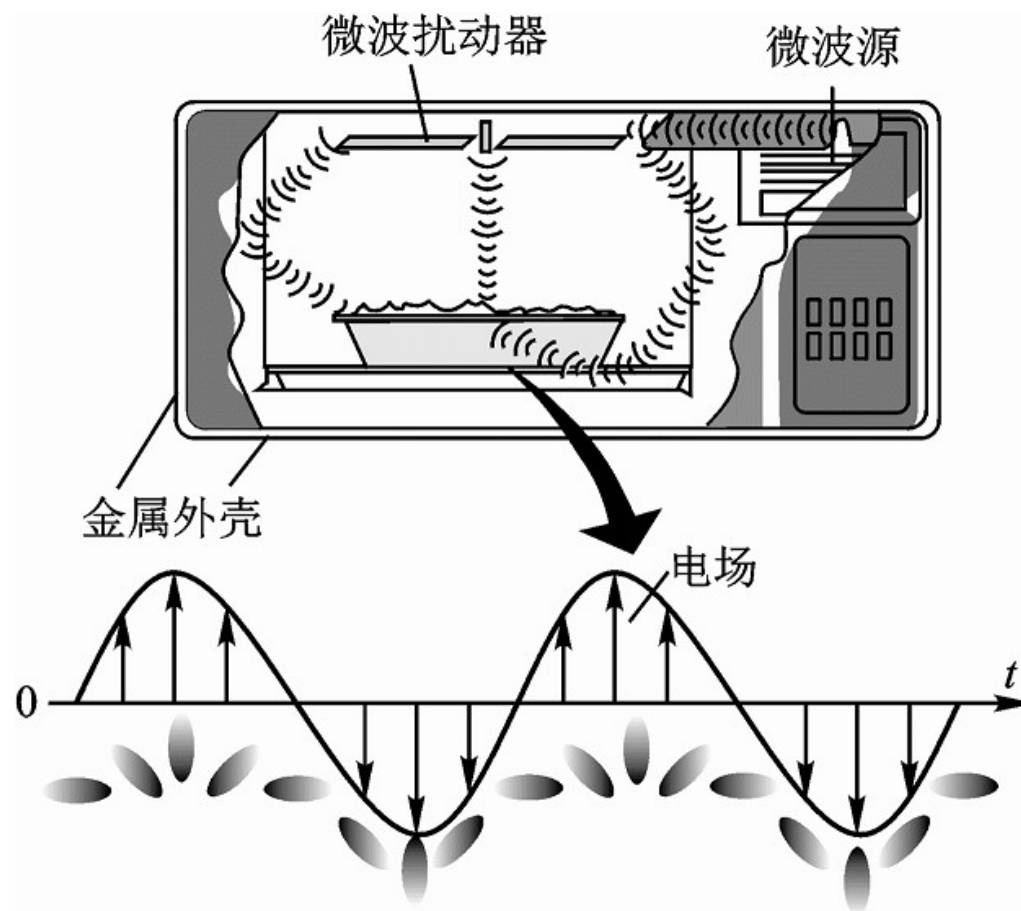


$$\vec{p} = q\vec{l}$$

电偶极子
方向从负
电荷指向
正电荷。



家用微波炉加热的原理—— 介质分子的反复极化



2. 极化强度矢量

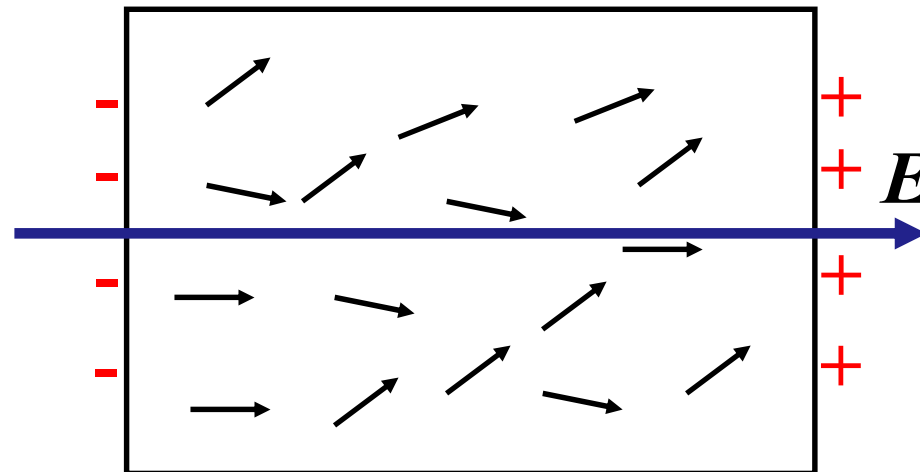
不管是位移极化还是取向极化，其最后的宏观效果是相同的：

- 1、电介质与外电场垂直的两相对表面上出现了极化电荷。
- 2、电介质内部有沿电场方向的等效电偶极矩。
- 3、外场越强，极化程度越强：极化电荷越多，等效电偶极矩越强。

定义极化强度矢量为

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta \tau}$$

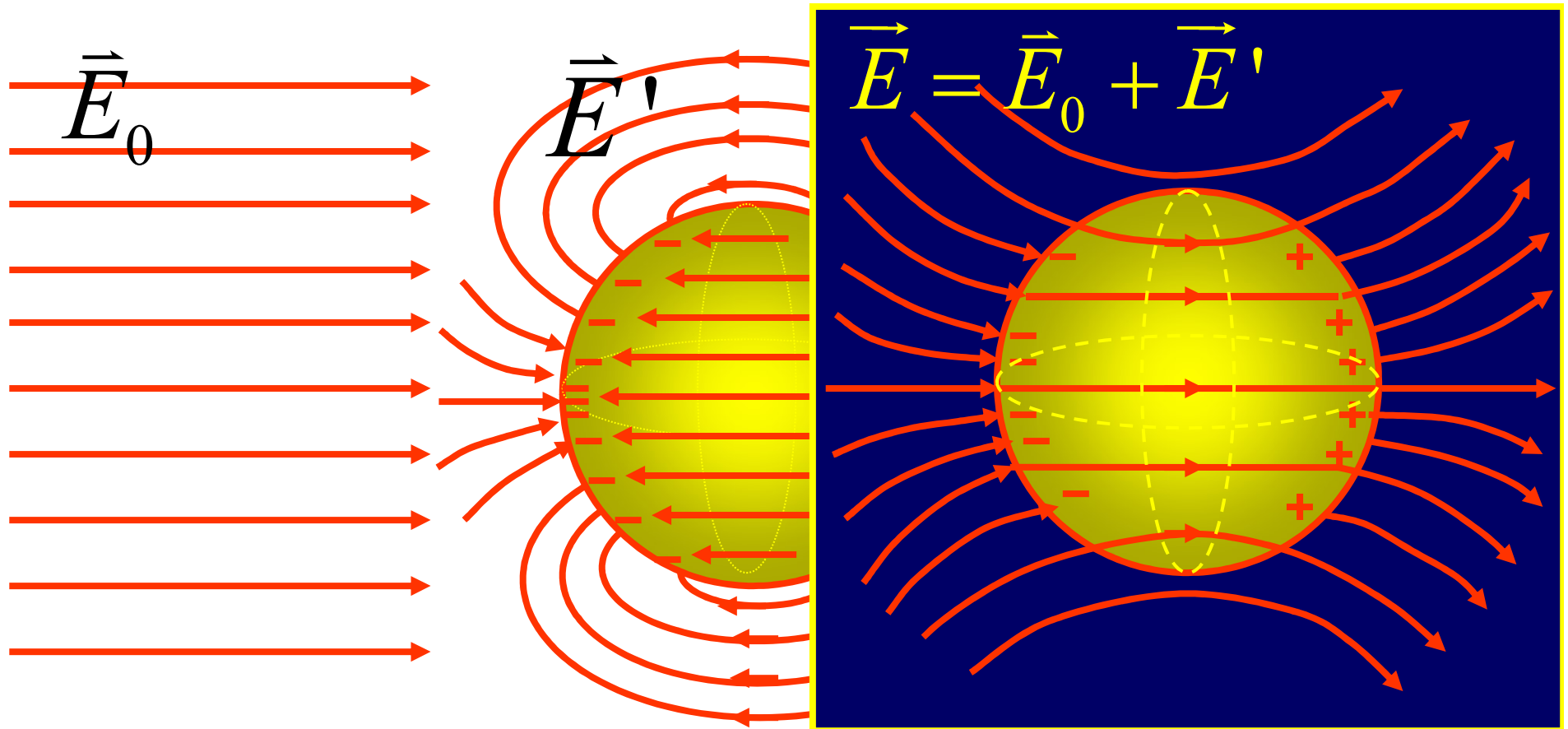
即单位体积内的电偶极矩。



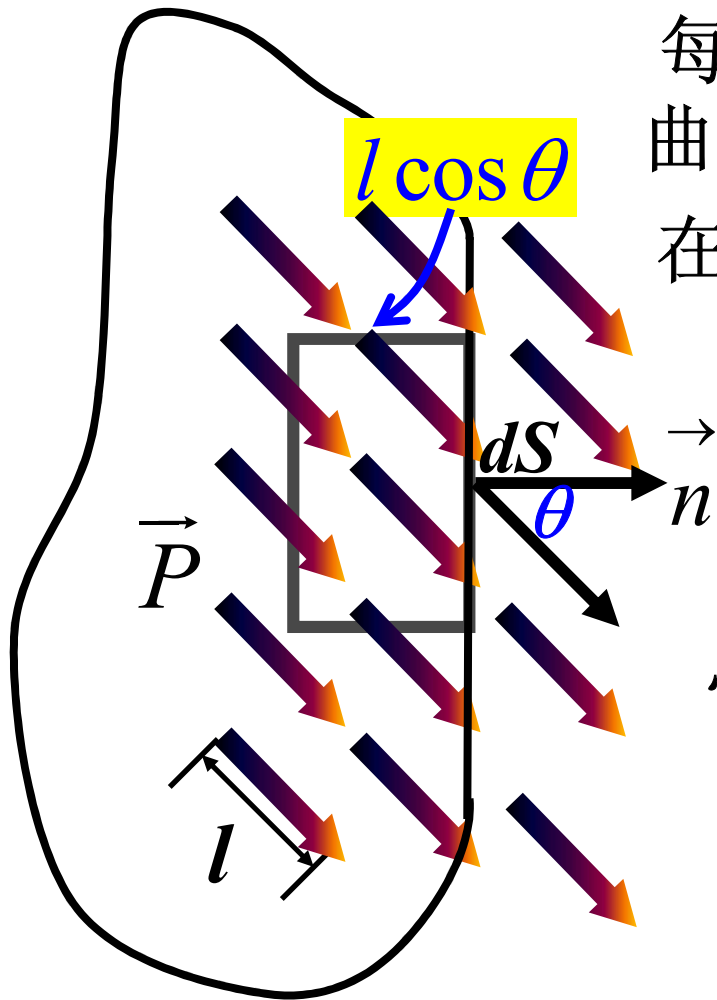
极化电场和实际电场

$\vec{E}$: 总场强, $\vec{E}_0$: 原外场场强 (自由电荷的电场)

$\vec{E}'$: 极化电场 (极化电荷的电场)



3. 极化强度与感应电荷的关系



每有一个电偶极子穿出曲面 S ，就在曲面内部留下一个感应负电荷 $-q$ ，在 dS 处穿出的偶极子都位于矩形内

图中矩形体积为 $l \cos \theta \cdot dS$

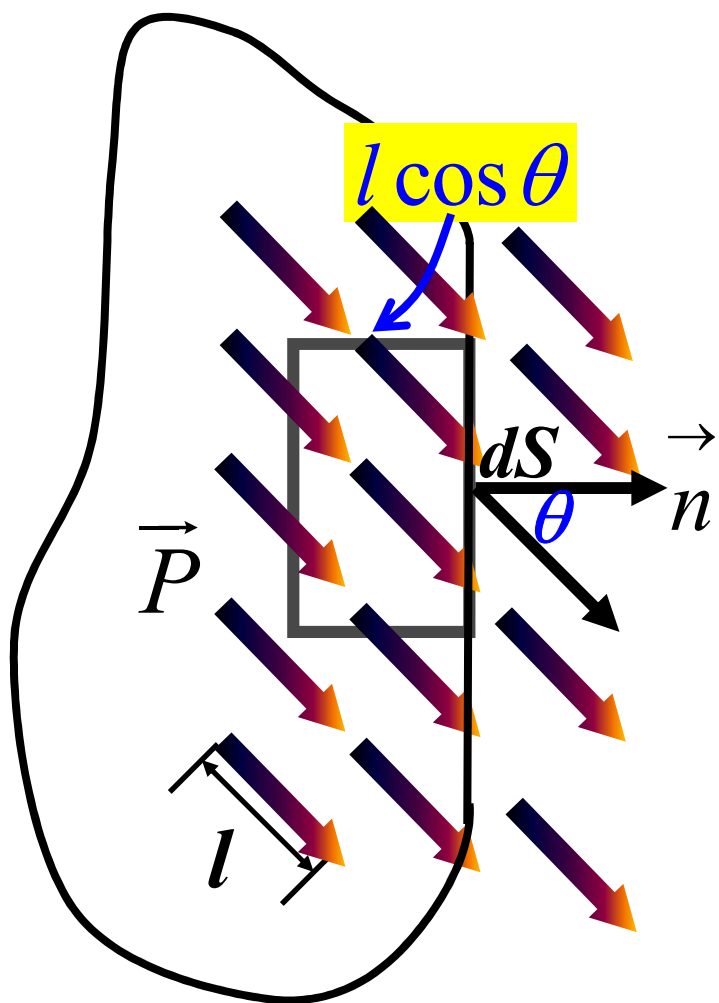
其中偶极子个数

$$l \cos \theta \cdot dS \cdot P / (ql)$$

它们对曲面内部感应电荷的总贡献：

$$\begin{aligned} q' &= -q \cdot (l \cos \theta \cdot dS \cdot P) / (ql) \\ &= -PdS \cos \theta = -\vec{P} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

3. 极化强度与感应电荷的关系



由 dS 处穿出的偶极子对曲面内部感应电荷贡献:

$$q' = -\vec{P} \cdot d\vec{S}$$

曲面 S 内部总的感应电荷为

$$Q' = \oint_S -\vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -Q'$$

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -Q'$$

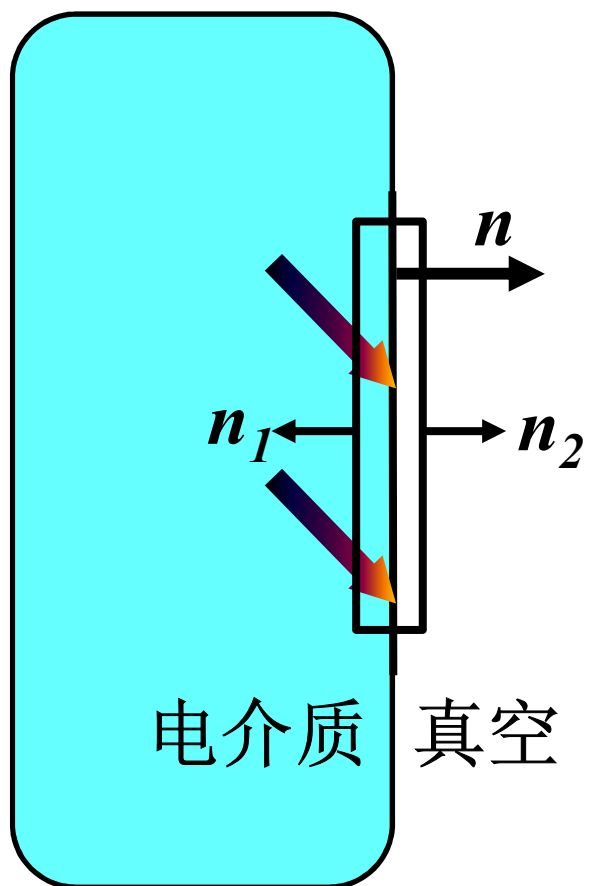
$$\oint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{P} d\tau = -\oint_{\Omega} \rho' d\tau$$

$$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P}$$

即感应电荷密度和极化强度的关系式。

*界面处感应电荷的计算

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -Q'$$



对如图所示矩形曲面，设侧面面积为 S

$$\vec{P} \cdot \vec{n}_1 S + \vec{P} \cdot \vec{n}_2 S = -Q = -\sigma' S$$

因右侧曲面位于真空，极化强度为零

$$\vec{P} \cdot \vec{n}_1 S = -\sigma' S$$

$$\sigma' = -\vec{P} \cdot \vec{n}_1$$

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

即表面感应电荷密度和极化强度的关系式。

4. **P** 和 **E** 的关系?

实验表明, 对于各向同性电介质, 极化强度正比于电场强度。

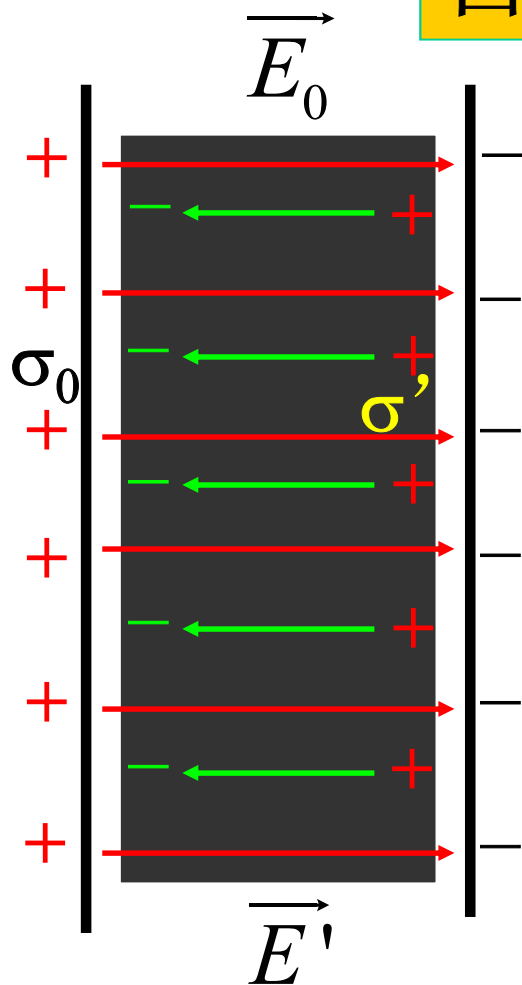
$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad \text{注意: } \left(\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \right)$$

χ --- 电极化率 (由介质本身性质决定的常数, 是反映介质本身性质的物理量。

真空可视为一种特殊的介质, 其电极化率 χ 为零。

例：有电介质存在时的电容器

自学



$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

$$P = \epsilon_0 \chi E = \chi(\sigma_0 - \sigma')$$

又因 $\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n}$ $\Rightarrow P = \sigma'$

$\Rightarrow \sigma' = \frac{\chi}{1 + \chi} \sigma_0 \Rightarrow E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\chi}{\epsilon_0(1 + \chi)} \sigma_0$

$$E = E_0 - E' = \frac{1}{\epsilon_0(1 + \chi)} \sigma_0$$

$$P = \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 \chi \frac{\sigma_0}{\epsilon_0(1 + \chi)} = \frac{\chi}{1 + \chi} \sigma_0$$

$$U = Ed \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_0 S}{U} = \epsilon_0 \frac{S}{d} (1 + \chi)$$

根据 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{E}$ 的关系进行计算很不方便

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$



感应电荷



自由电荷+感应电荷

§ 7-9 电位移、电介质存在时的高斯定理

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + \frac{\rho'}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_0$$

定义电感应强度 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
(或称电位移)

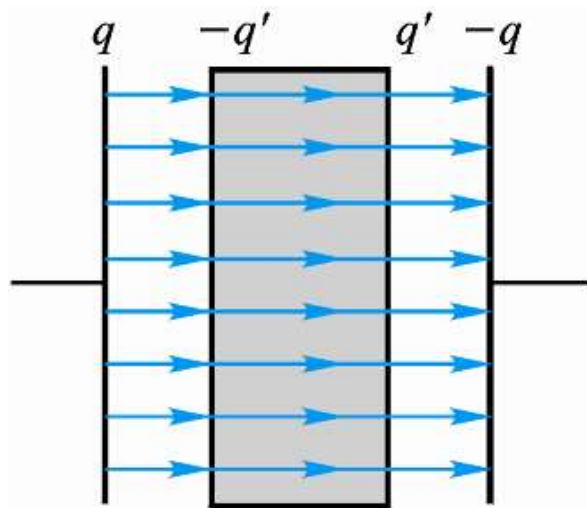
得到 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$

积分形式 $\oint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{D} d\tau = \oint_{\Omega} \rho_0 d\tau \Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Omega} \rho_0 d\tau$

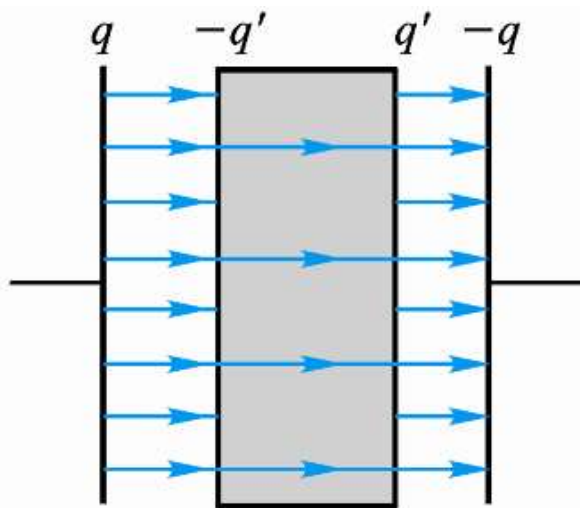
$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{0,i}$

即：通过任意曲面的电感应强度 $\mathbf{D}$ 的通量等于这个曲面所围自由电荷的电量。 $\mathbf{D}$ 线起始于正自由电荷，终止于负自由电荷，在没有自由电荷处不中断。

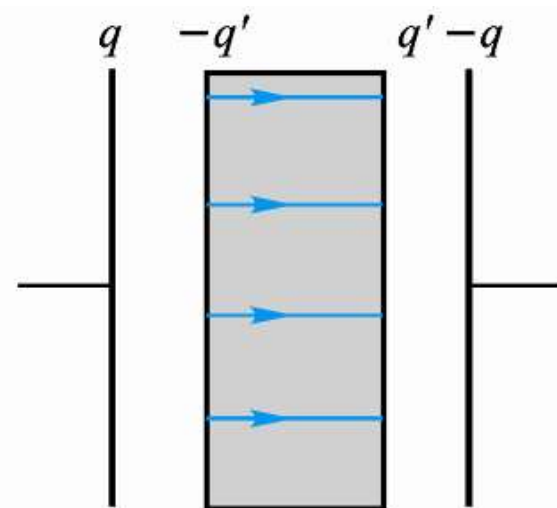
电位移线与电场线



(a) D 线均匀分布



(b) 电介质内部 E 线较稀疏



(c) P 线只在电介质内部

真空

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

介质

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

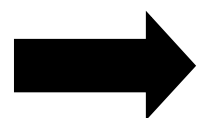
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{0,i}$$

注意，上述公式的应用范围不限于“真空”或者“介质”，使用哪个公式只是视方便而定。

一些公式变形

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} \\ &= \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}\end{aligned}$$

因为 $\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = \rho_0$

 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon}$

积分形式 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} \oint_{\Omega} \rho_0 d\tau$

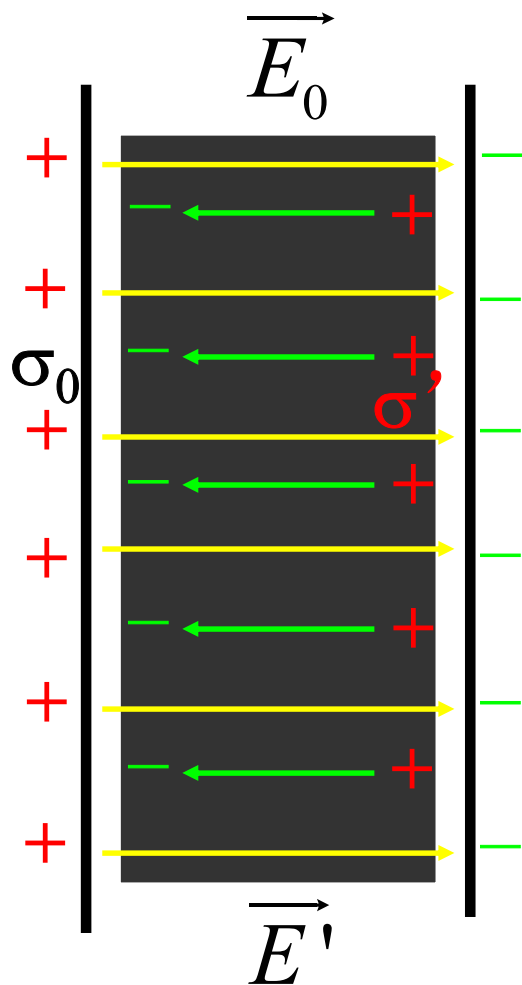
定义：

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi) = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

ε 称为电介质的
电容率或介电常
数, ε_r 称为相对介
电常数。

例：有电介质存在时的电容器

利用电位移的高斯定理 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Omega} \rho_0 d\tau$



$$\Rightarrow D = \sigma_0$$

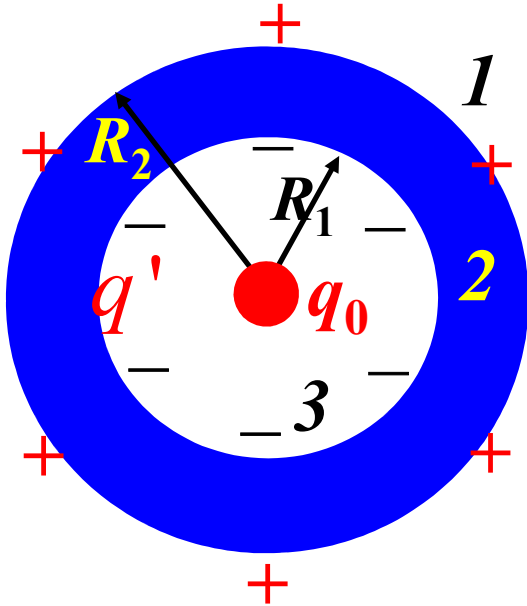
$$\text{因为 } \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}$$

$$\text{因为 } \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$



$$P = \varepsilon_0 \chi \frac{\sigma_0}{\varepsilon} = \varepsilon_0 \chi \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 (1 + \chi)} = \frac{\chi}{1 + \chi} \sigma_0$$

例：电介质球壳 B 内部放置一个点电荷 q_0 ，求空间 D ， E ， P 以及感应电荷量。



1. $q_0 \rightarrow D$
2. $D \rightarrow E$
3. $E \rightarrow P$
4. $P \rightarrow \sigma'$

解：由高斯定理得 $D \cdot 4\pi r^2 = q_0$
 $\Rightarrow D = \frac{1}{4\pi} \frac{q_0}{r^2}$ 对全空间成立

利用 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$

$$\text{区域1,3: } E = D / \epsilon = D / \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2}$$

$$\text{区域2: } E = D / \epsilon = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_0}{r^2}$$

$$\text{区域2: } P = \epsilon_0 \chi \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_0}{r^2} = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_r} \frac{q_0}{r^2}$$

利用 $\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q'$ $\Rightarrow -q' = \frac{\chi}{\epsilon_r} q_0 = \frac{\chi}{1 + \chi} q_0$

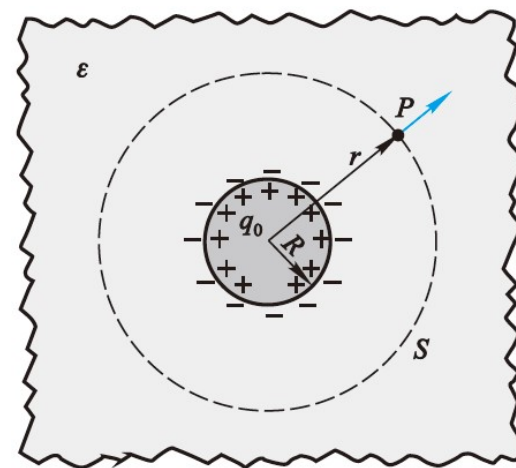
例：金属球半径为 R ，带电荷 q_0 ，浸泡在均匀“无限大”电介质中（电容率为 ϵ ），求球外任一点处的电场场强及极化电荷分布。

解： $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \cdot D = q_0$

$$D = \frac{q_0}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

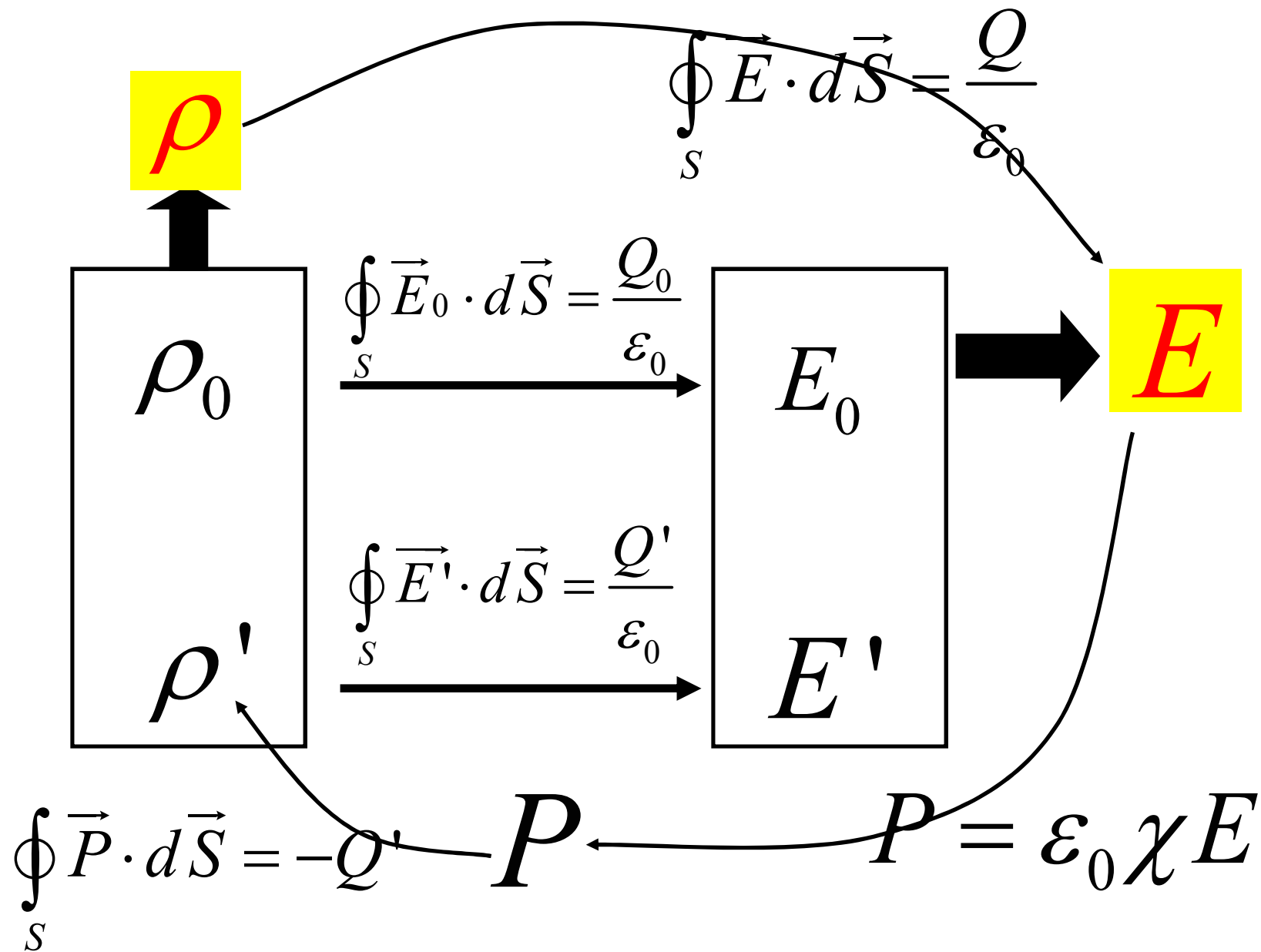
电场强度减弱到真空时的 $\frac{1}{\epsilon_r}$

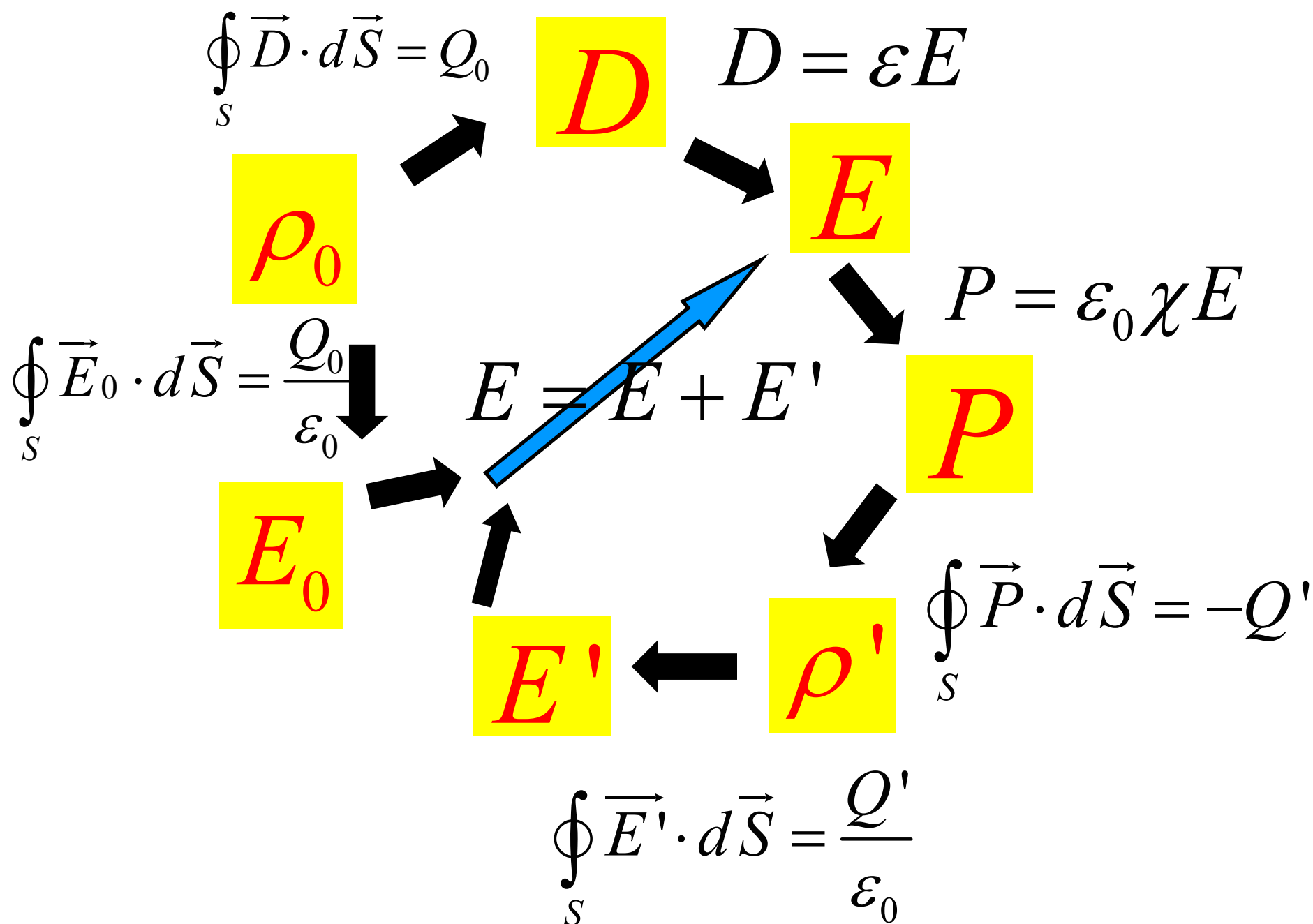


方向： $\vec{e}_r$

问题：极化强度 $\mathbf{P}=?$ ，极化电荷=?

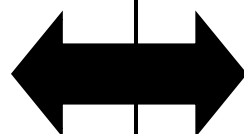
$$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P}$$





微分形式

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{E}_0 &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{E}' &= \frac{\rho'}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{P} &= -\rho' \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_0}{\epsilon} \end{aligned}$$

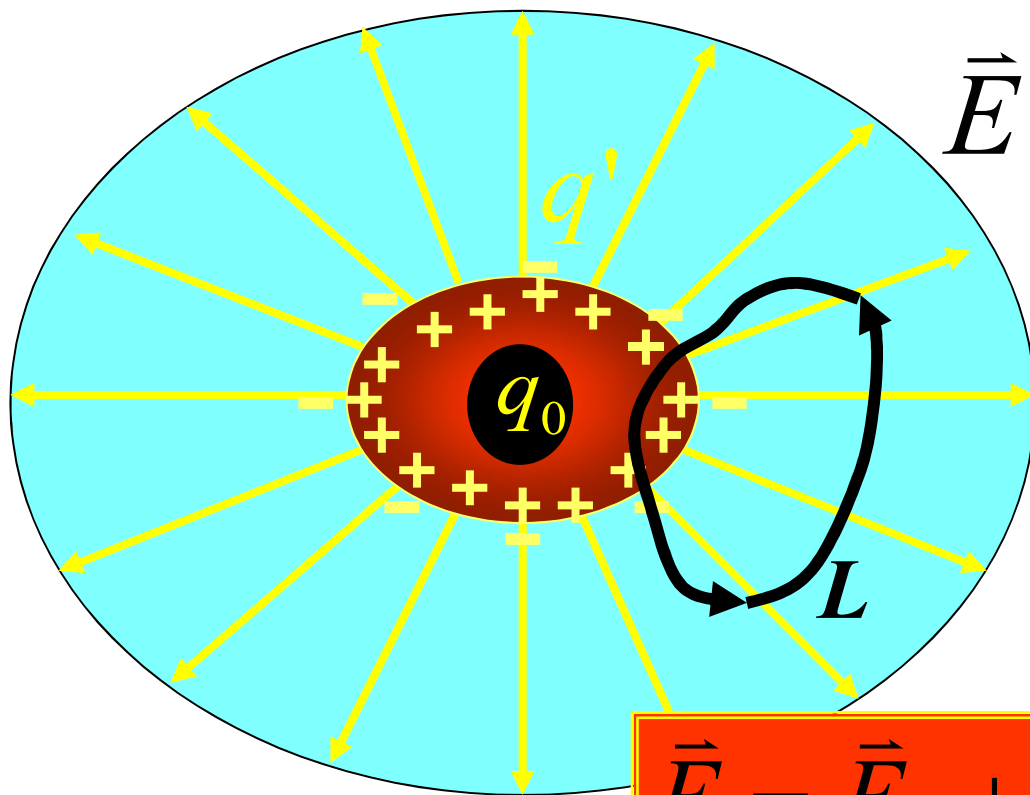


积分形式

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_0}{\epsilon_0} \\ \oint_S \vec{E}' \cdot d\vec{S} &= \frac{Q'}{\epsilon_0} \\ \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} &= -Q' \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q_0 \\ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_0}{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

7. 介质中的场强环路定理



在有介质存在的条件下，场强的环流为零。

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

静止的自由电荷产生的场

静止的极化电荷产生的场

8. 静电场的边值条件

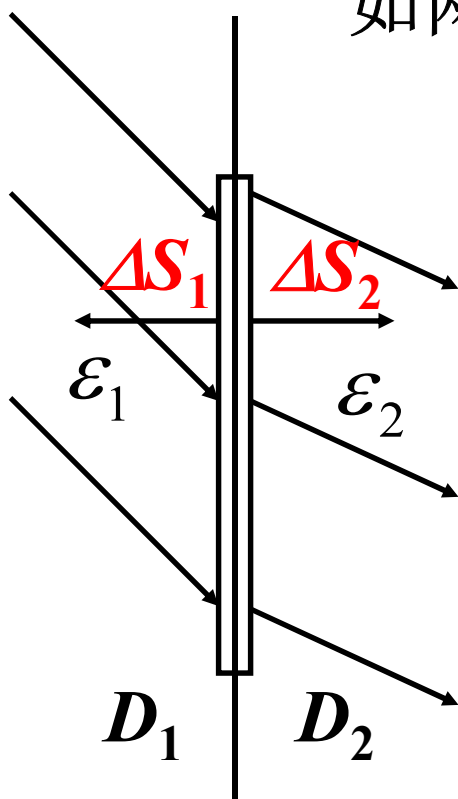
拓展

如两种介质界面处无自由电荷，则

$$\text{因为 } \vec{D}_1 \cdot \vec{\Delta S}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{\Delta S}_2 = \rho_0$$

$$-D_{1n} \Delta S + D_{2n} \Delta S = \rho_0 = 0$$

$$\longrightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

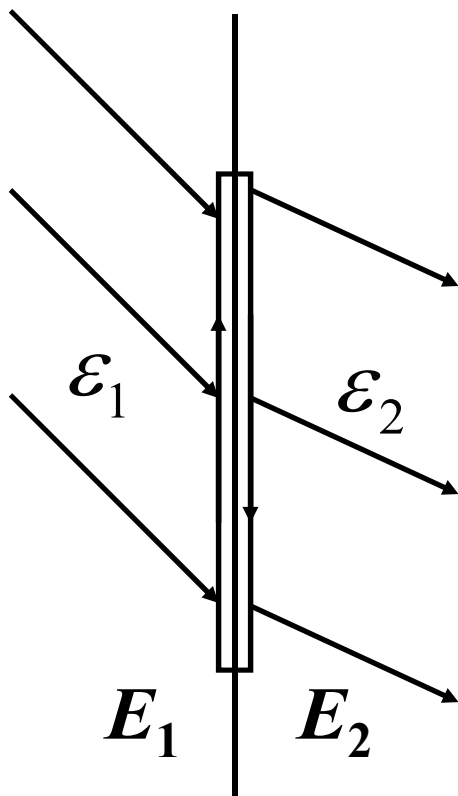


即当从一种介质过渡到另外一种介质时，电感应强度的法向分量保持不变。

8. 静电场的边值条件

拓展

根据电场强度的环路定理



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

对图示环路，

$$-E_{1t}l + E_{2t}l = 0$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

当从一种介质过渡到另外一种介质时，电场强度的切向分量保持不变。

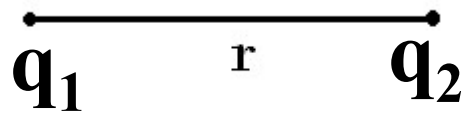
静电场的能量

一个带电体系具有的静电能就是该体系的电势能，它等于把各电荷元从相互无限远离的状态聚集成该带电体系的过程中，外界所作的功。

1、点电荷系统的相互作用能（不考虑自能）

1) 两个点电荷

设二者原在无穷远



先将 q_1 移入 $A_1 = 0$

再将 q_2 移入 $A_2 = q_2(V_2 - V_\infty)$

V_2 : q_1 在 q_2 位置激发的电势 $\longleftarrow V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$

$\therefore$ 系统互作用能

$$\begin{aligned} W = A_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{2} q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r} + \frac{1}{2} q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} \\ &= \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 \end{aligned}$$

2) 三个点电荷

先将 q_1 移入 $A_1 = 0$

再将 q_2 移入 $A_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

再将 q_3 移入 $A_3 = q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$

$\therefore$ 系统互作用能

$$W = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 + \frac{1}{2} q_3 V_3$$

$$V_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}}$$

$$V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

$$V_3 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

3) n个点电荷系统

一般言之：对n个电荷组成的点电荷系，其相互作用能：

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

V_i 是除 q_i 以外其它电荷在 q_i 处产生的电势！

注：若考虑点电荷系统自能，结果为无穷大。

2、电荷连续分布时（带电体）的静电能

点电荷系： $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$

带电体推广： $q_i \rightarrow \rho dV, \quad V_i \rightarrow \phi$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \phi dV$$

ϕ : 所有电荷在 dV 处激发的电势，
包括 ρdV 自身。

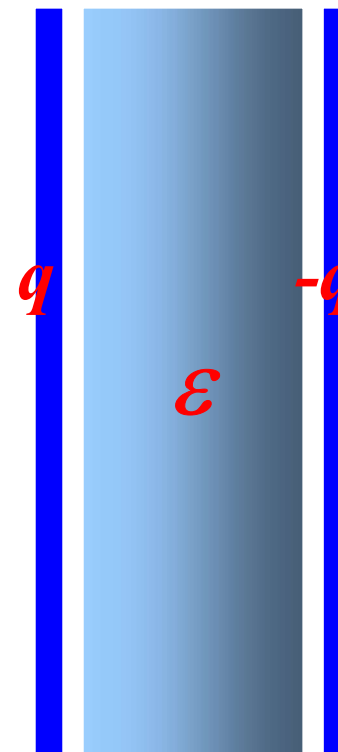
二维： $W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma \phi dS$

平板电容器所带的电势能

$$\text{二维: } W = \frac{1}{2} \iint_s \sigma \phi dS$$

$$W = \frac{1}{2} (\sigma S V_+ - \sigma S V_-) = \frac{1}{2} Q U$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$$



对有、无介质存在的电容器均适用。

3、静电场的静电能(一般情况：存在介质)

以平板电容器为例，

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} S \varepsilon E \cdot Ed \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon E^2 Sd = \frac{1}{2} DE \cdot Sd \end{aligned}$$

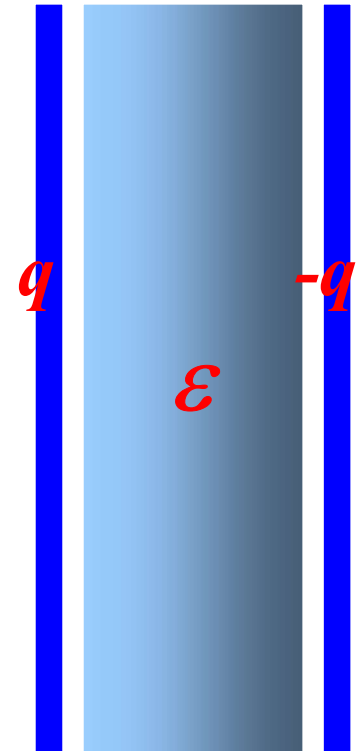
于是单位体积的能量，即能量密度为

$$w = \frac{1}{2} DE \xrightarrow{\text{真空中}} w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

对更一般的情况，

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

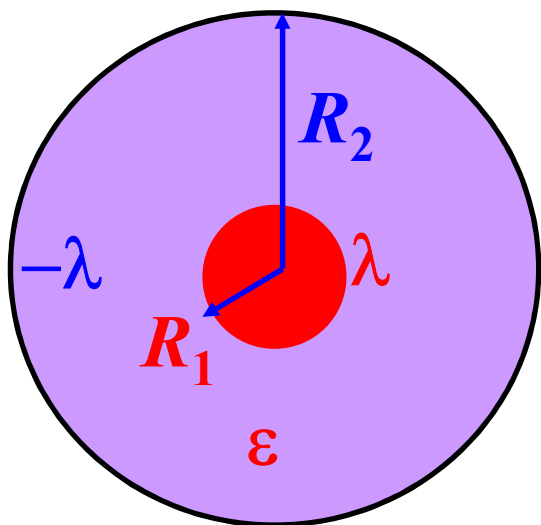
此结论适用于一切静电场。



静电场的
能量储存在场中！

例：求填充了介电常数为 ε 的同轴圆柱形电容器内部电场的静电能。

解：由高斯定理



$$D \cdot 2\pi r L = \lambda L \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$E = D / \varepsilon = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon r}$$

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \varepsilon r^2}$$

对单位长度的电容器：

$$W = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \varepsilon r^2} \cdot 2\pi r dr = \frac{\lambda^2}{4\pi \varepsilon} \left(\ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

- 作业:

XXXXXXXXXX

END