

2021-2012 微积分II 期末试题与解析

试卷：

[2021](#)

[2020](#)

[2019](#)

[2018](#)

[2017](#)

[2016](#)

[2015](#)

[2014](#)

[2013](#)

[2012](#)

(ง •_•)ง加油！

左侧试卷附有超链接
每一份试卷的标题同样附
带对应年份的答案链接
对应答案的标题上附带有
返回链接

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2021.6.22)

一、计算下列各题 (6分×5 = 30 分)

1. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$ 在点 $P(1, 2, 3)$ 处的法平面与切线方程.
2. 求柱面 $x^2 + y^2 = ay$ ($a > 0$) 位于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内部分曲面的面积.
3. 计算第二类曲线积分 $I_1 = \int_C \cos(x + y^2)dx + (2y \cos(x + y^2) - \sqrt{1 + y^4})dy$, 其中 C 为旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, 由 $O(0, 0)$ 到 $A(2\pi a, 0)$, 其中 $a > 0$.
4. 计算第一类曲面积分 $I_2 = \iint_S (xy + yz + zx)dS$, 其中 S 为圆锥面 $x = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$) 所截下的部分.
5. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ 的敛散性.

二、计算下列各题 (8分×5 = 40 分)

1. 讨论数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 的敛散性.
2. 讨论数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{\sqrt{n}}$ 的敛散性. 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?
3. 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ 的和.
4. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{2xy - x^2}$ 的通积分.
5. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^3}{xy^2}$ 的通积分.

三、(本题10分) 计算 $I_3 = \int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中 C 是平面 $x + y + z = 1$ 的第一卦限部分与三个坐标面的交线, 从 z 周正向往 z 轴负向看去是逆时针方向.

四、(本题10分) 计算 $I_4 = \iint_S 4xz dy dz - 2yz dz dx + (1 - z^2) dx dy$, 其中 S 为曲线 $z = e^y$ ($0 \leq y \leq a$) 绕 z 轴旋转生成的旋转曲面, 取下侧.

五、(本题10分) 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} x^{2(n+1)}$, $x \in (-1, 1)$. 求出 $f(x)$ 满足的微分方程, 并求解之. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$.

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2020.8.18)

一、(8分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 讨论 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性以及连续可微性.

二、计算下列各题 (7分 $\times$ 3 = 21 分)

1. 求过直线 $L: \begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 且与曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 相切的平面方程.
2. 求旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2az$ ($a > 0$) 与半球面 $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$ 所围立体的表面积.
3. 计算 $I = \iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} dx dy$, 其中 $D: x \geq 1, y \geq x^2$.

三、计算下列各题 (7分 $\times$ 3 = 21 分)

1. 计算 $I = \int_C 2x dx + z dy + (x + 2y - z) dz$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y = z \end{cases}$ 上从点 $A(1, 0, 0)$ 到 $B(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 的位于第一卦限的一段曲线.
2. 计算 $I = \oint_C \frac{y^2}{2} dx - xz dy + \frac{y^2}{2} dz$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x + y = R. \end{cases}$ 从 y 轴的正向看去是依顺时针方向.
3. 计算曲面积分 $I = \iint_S (x^3 + az^2) dy dz + (y^3 + ax^2) dz dx + (z^3 + ay^2) dx dy$, 其中 S 为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的外侧.

四、计算下列各题 (7分 $\times$ 4 = 28 分)

1. 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)$ 的敛散性.
2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性. (提示: $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$)
3. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$ 的和函数, 并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 \frac{1}{3^n}$ 的和.
4. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1, 1]$ 上的表达式为 $f(x) = x^2$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

五、计算下列各题 (7分 $\times$ 2 = 14 分)

1. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \sin(1 + x + y), y(0) = -1$ 的特解.
2. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{2(xy^2 - x^2)}$ 的通解.

六、(8分) 求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ 的通解.

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2019.6.17)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求平面 $x + 4y - 8z = 18$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 6y$ 所截部分的面积.

2. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin \frac{\pi}{5^n}$ 的敛散性.

3. 讨论广义积分 $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$ 的敛散性.

4. 求微分方程 $2xy \cdot y' - y^2 + x = 0$ 的解.

5. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y + 5}{x + y^2 + 2}$ 的通积分.

二、(10分) 求过直线 $L: \begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 且与曲面 $S: 3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 相切的切平面方程.

三、(10分) 设 $C: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (t \in [0, 2\pi])$ 为旋轮线的一拱, 方向由原点到 $A(2\pi a, 0)$, 计算 $I_1 = \int_C [(x + y + 1)e^x - e^y + y]dx + [e^x - (x + y + 1)e^y - x]dy$.

四、(10分) 计算 $I_2 = \iint_S 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy$, 其中 S 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

五、(10分) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性; 若收敛, 求其和.

六、(10分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的收敛域、和函数, 并由此计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

七、(10分) 将函数 $f(x) = \pi^2 - x^2$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

八、(10分) 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x + e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解, 求出此微分方程, 写出其通解.

微积分Ⅱ（第一层次）期末试卷 (2018.7.3)

一、计算下列各题(6分×5=30分)

1. 设 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, 其中 $f(v)$ 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.
2. 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt[3]{1+x}} dx$ 的敛散性.
3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$ 的收敛域.
4. 求微分方程 $(x - \sin y)dy + \tan y dx = 0$ 满足初始条件 $y(1) = \frac{\pi}{6}$ 的特解.
5. 求微分方程 $\left(\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 5\right)dx + \left(-\frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + \frac{6}{y^3}\right)dy = 0$ 的通积分.

二、(10分) 计算 $I_1 = \iint_S (x^3 + az^2)dydz + (y^3 + ax^2)dzdx + (z^3 + ay^2)dxdy$, 其中 S 为曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ($a > 0$) 的上侧.

三、(10分) 计算 $I_2 = \oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, 其中 C 是立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ 的表面与平面 $x + y + z = \frac{3a}{2}$ 的交线, 从 z 轴正向看去是逆时针方向.

四、(10分) 对常数 p , 讨论数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n^p}$ 何时绝对收敛, 何时条件收敛, 何时发散.

五、(10分) 试将函数 $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 14}{(x-3)^2(2x+5)}$ 展成马克劳林级数, 并写出其收敛域.

六、(10分) 将函数 $f(x) = \frac{x}{4}$ 在 $[0, \pi]$ 上展开成正弦级数, 并求级数 $1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots$ 的和.

七、(10分) 求二阶微分方程 $y'' - y = 2x + e^{2x} \cos x$ 的通解.

八、(10分) (1) (非商学院学生做) 设函数 $f(x)$ 对定义域内任意两点 x, y 有等式 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$, 且 $f'(0) = a$ ($a \neq 0$), 求函数 $f(x)$.

(2) (商学院学生做) 已知 $\int_0^1 f(ax)da = \frac{1}{2}f(x) + 1$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2017.7.4)

一、计算下列各题(6分 × 5=30分)

1. 求函数 $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ 的极值, 并讨论是极大还是极小.

2. 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$ 的敛散性.

3. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)^p \ln \frac{n+2}{n+1}$ ($p \in \mathbb{R}$) 的敛散性.

4. 求微分方程 $(x^2y^3 + xy) \frac{dy}{dx} = 1$ 的通积分.

5. 求微分方程 $y'' = 1 + (y')^2$ 的通解.

二、(10分) 计算 $I_1 = \oint_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, 其中 C 取逆时针方向, 分别取以下两种路径:

(1) 圆周 $x^2 + y^2 = 2x + 2y - 1$; (2) 闭曲线 $|x| + |y| = 1$.

三、(10分) 计算 $I_2 = \oint_C \frac{y^2}{2} dx - xzdy + \frac{y^2}{2} dz$, 其中 C 是 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与 $x + y = R$ 的交线, 从 y 轴正向看去是顺时针方向.

四、(10分) 计算第二类曲面积分 $I_3 = \iint_{\Sigma} xdydz + (z+1)^2 dxdy$, 其中 Σ 是下半球面 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$, 取下侧.

五、(10分) (1) 证明 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

(2) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性. 如果收敛, 指明其是条件收敛还是绝对收敛, 并说明理由.

六、(10分) 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$ 的和.

七、(10分) 将函数 $f(x) = x \sin x$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内展开成傅里叶级数.

八、(10分) (1) (非商学院学生做) 设 $f(x)$ 二阶连续可微, $g(x)$ 一阶连续可微, 且满足 $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = 2e^x - f(x)$, 且 $f(0) = 0$, $g(0) = 2$, 计算 $I_4 = \int_0^{\pi} \left(\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right) dx$.

(2) (商学院学生做) 设 $f(x) = x^3 + 1 - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2016.6.20)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{5xy}{3(x^2 + y^2)} \right)^{x^2 + y^2}$.

2. 设 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 由方程组 $\begin{cases} u^2 - v + xy = 0, \\ u + v^2 + x - y = 0 \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

3. 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ 收敛, 并求其和。

4. 求微分方程 $y' - y = xy^3$ 的通解。

5. 求微分方程 $yy'' = (y')^2$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 的特解。

二、(10分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 讨论 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性, 可偏导性与可微性。

三、(10分) 求第一类曲面积分 $I_1 = \iint_S x^2 y^2 dS$, 其中 S 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq R^2$.

四、(10分) 计算第二类曲面积分 $I_2 = \iint_S (x^3 + az^2) dy dz + (y^3 + ax^2) dz dx + (z^3 + ay^2) dx dy$, 其中 $a > 0$ 是一个常数, S 是上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧. (提示: 利用高斯公式)

五、(10分) 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n}$ 的敛散性。如果收敛, 说明其是条件收敛还是绝对收敛。

六、(10分) 求 $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x$ 的马克劳林展式。

七、(10分) 将函数 $f(x) = x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开成余弦级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和。

八、(10分) (1) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛域;

(2) 设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, 建立 $S(x)$ 所满足的微分方程, 并求 $S(x)$.

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2015.6.22)

一、计算下列各题(5分 × 11=55分)

1. 计算曲面积分 $\iint_S z \, dS$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ ($0 < h < a$) 截出的顶部.
2. 计算二重积分 $\iint_D |y - x^2| \, dx \, dy$, 其中 D 为 $|x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.
3. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 5$ 上点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面和法线.
4. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} \, dx$ 的敛散性, 若收敛, 计算其值.
5. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy+x^2}$.
6. 计算曲线积分 $\oint_C \arctan \frac{y}{x} \, dy - dx$, 其中 C 为 $y = x^2$ 与 $y = x$ 所围区域的边界, 取逆时针方向.
7. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{7}{10^n} \right)$ 是否收敛, 如果收敛, 求其和.
8. 计算曲线积分 $\int_l \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}$, 其中 l 为包含单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 在内的分段光滑的简单闭曲线, 取逆时针方向.
9. 求解微分方程 $(e^x \sin y - 2y \sin x) \, dx + (e^x \cos y + 2 \cos x) \, dy = 0$.
10. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ 的收敛域, 并求其和函数.
11. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ 的值. (提示: 可利用上题结果)

二、(12分) 计算曲面积分 $\iint_S \frac{ax \, dy \, dz - 2y(z+a) \, dz \, dx + (z+a)^2 \, dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中 $a > 0$ 是一个常数, S 是曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧,

三、(12分) 设函数 $Q(x, y)$ 连续可微, 曲线积分 $\int_C 3x^2 y \, dx + Q(x, y) \, dy$ 与积分路径无关, 且对一切实数 t 都有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 3x^2 y \, dx + Q(x, y) \, dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 3x^2 y \, dx + Q(x, y) \, dy$, 求函数 $Q(x, y)$.

四、(13分) 1. 求函数 $f(x) = x^2, (-\pi \leq x \leq \pi)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅立叶展开式;

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ 的和.
3. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

五、(8分) (本题非商学院的考生做) 设 $a_n > 0, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ($n = 1, 2, \cdots$),

证明: (1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛; (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

六、(8分) (本题商学院的考生做) 讨论当实数 p 为何值时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^p$ 收敛, 实数 p 为何值时, 级数发散.

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2014.6.23)

一、简答题(6分 $\times$ 8=48分)

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$ 的收敛域.
2. 求积分 $I = \int_C \sqrt{y} \, ds$, 其中 C 为抛物线 $y = x^2$ 从点 $(0, 0)$ 到 $(2, 4)$ 的一段弧.
3. 求微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 的通积分.
4. 已知 $f(x)$ 为 $[0, 2]$ 上的连续函数, 证明 $\int_0^1 \int_0^1 f(x+y) \, dx \, dy = \int_0^1 u[f(u) + f(2-u)] \, du$.
5. 求函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 关于 x 的幂级数展式.
6. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2} \, dx$ ($p \in \mathbb{R}$) 的敛散性.
7. 求函数项级数 $I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ 的和函数.
8. 计算曲面积分 $I = \iint_S x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($R > 0$) 外侧在 $z \geq 0$ 的部分.

二、(10分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{1}{2^n n!}$ 的和.

三、(10分) 计算曲线积分 $\int_{\Gamma} 2y \, dx + x \, dy + e^z \, dz$, 其中积分曲线 Γ 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y = 1 \end{cases}$ 从 y 轴正向看去是顺时针方向.

四、(10分) 计算曲面积分 $\iint_S (xy + yz + zx) \, dS$, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截得的有限部分.

五、(10分) 设 $f(x) = |x|$,

1. 求 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的正弦级数展式的前两项系数 b_1 和 b_2 ;
2. 证明: 对于二元函数 $F(a, b) = \int_0^{\pi} [f(x) - a \sin x - b \sin(2x)]^2 \, dx$, (b_1, b_2) 为其在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值点.

商学院同学任选下列两题中一题, 其他院系同学必须选做第七题.

六、(12分) (1) 求方程 $y'' - 5y' + 6y = e^x$ 的通解.

(2) 设 $y = f(x)$ 为 $y''' - 5y'' + 6y' = e^x$ 的解, 证明: $y = f(x)$ 为 $y'' - 5y' + 6y = e^x$ 的解的充要条件为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

七、(12分) (1) 求方程 $y'' - 5y' + 6y = f(x)$ 的通解, 其中 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(2) 若 $f(x) \geq 0$, 证明上述方程满足条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的解必非负.

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2013.6.26)

一、计算下列各题(5分 $\times$ 10=50分)

1. 计算曲面积分 $\iint_S z \, dS$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ ($0 < h < a$) 截出的顶部.
2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和.
3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ 的收敛半径, 收敛区间和收敛域.
4. 求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解.
5. 解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy + x^2}$.
6. 判别广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$ 的敛散性, 若收敛, 计算其值.
7. 计算曲面积分 $\iint_S xyz \, dx \, dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分.
8. 计算曲线积分 $\int_l \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}$, 其中 l 为椭圆周 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, 积分按逆时针方向进行.
9. 求曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2$ 平行于平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面的方程.
10. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 是区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z$.

二、(8分) 设区域 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq t, x^2 + y^2 \leq t^2\}$ ($t > 0$), 函数 $f(u)$ 可导并且 $f(0) = 0, f'(0) = 2, F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2) dx dy dz$, 求 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^5}$.

三、(10分) 设函数 $f(x)$ 二阶连续可微, 满足 $\int_0^x (x+1-t)f'(t) dt = x^2 + e^x - f(x)$, 求函数 $f(x)$.

四、(12分) 计算曲线积分 $\int_l (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz$, 其中积分曲线 l 是从 $A(a, 0, 0)$ 到 $B(a, 0, h)$ 的螺旋线 $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = \frac{h}{2\pi} \varphi$.

五、(12分) 1. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = 2 + |x|, (-1 \leq x \leq 1)$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的傅立叶展开式;

2. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.
3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

六、(8分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续可微函数, 使得广义积分 $\int_1^{+\infty} |f'(x)| dx$ 收敛, 证明:

如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 收敛, 则广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2012.6.20)

一、计算下列各题(6分 × 10=60分)

1. 计算曲面积分 $\iint_S z \, dS$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ ($0 < h < a$) 截出的顶部.
2. 计算曲面积分 $\iint_S (x-y) \, dx \, dy + (y-z)x \, dy \, dz$, 其中 S 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0, z = 3$ 所围成的空间闭区域 V 的整个边界曲面的外侧.
3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ 的和.
4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域.
5. 求微分方程 $y'' + y = x^2$ 的通解.
6. 求微分方程 $(x-y) \, dx + (x+y) \, dy = 0$ 的通解.
7. 求函数 $\ln \frac{1+x}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展式.
8. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^p} \, dx$ ($p > 0$) 的敛散性.
9. 计算曲线积分 $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = ay$ ($a > 0$).
10. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} y^2 \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 为锥面 $z = \sqrt{4x^2 + 4y^2}$ 与 $z = 2$ 所围立体.

二、(10分) 讨论实数 p 为何值时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)^p$ 收敛, 实数 p 为何值时, 级数发散.

三、(10分) 设函数 $f(x), g(x)$ 连续可微, $f(0) = g(0) = 0$, 使得曲线积分

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)} \left((x^2 - f(x))y + \frac{1}{2}g(x)y^2 \right) dx + (f(x)y - g(x)) dy + dz$$

与路径无关, 求出 $f(x), g(x)$, 并求出该曲线积分的值.

四、(10分) 1. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为 $f(x) = \pi^2 - x^2$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅立叶级数展开式;

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ 的和.
3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

五、(本题非商学院的学生必做题, 10分) 已知曲线积分 $\int_L \frac{1}{f(x) + 8y^2} (x \, dy - y \, dx)$ 恒等于常数 A , 其中函数 $f(x)$ 连续可导, $f(1) = 1$, L 为任意包围原点 $O(0,0)$ 的简单闭曲线, 取正向,

(1) 设 G 为不包含原点的单连通区域, 证明: G 内的曲线积分 $\int_C \frac{1}{f(x) + 8y^2} (x \, dy - y \, dx)$ 与路径无关, 其中 C 为完全位于 G 内的曲线;

(2) 求函数 $f(x)$ 与常数 A .

六、(本题商学院学生做, 非商学院学生做了不给分, 10分) 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\oint_C (y-z) \, dx + (z-x) \, dy + (x-y) \, dz,$$

其中 C 是椭圆 $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ ($a > 0, h > 0$), 从 x 轴的正向看去, 此椭圆取逆时针方向.

微积分 II (第一层次) 期末试卷参考答案 (2021.6.22)

一、 1. 法平面方程为 $x - 2y + z = 0$, 切线方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

2. 解: 柱面在第一卦限部分记为 S_1 , 则 $S_1 : x = \sqrt{ay - y^2}, (y, z) \in D, D = \{(y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - ay}, 0 \leq y \leq a\}$.

$$S = 4S_1 = \iint_D \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dx dy = 4 \iint_D \frac{a}{2\sqrt{ay - y^2}} dx dy = 2 \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2 - ay}} \frac{a}{\sqrt{ay - y^2}} dx = 4a^2.$$

3. 解: $P = \cos(x + y^2), Q = 2y \cos(x + y^2) - \sqrt{1 + y^4}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -2y \sin(x + y^2)$, 所以积分与路径无关. 取直线段 $\overline{OA} : y = 0, x : 0 \rightarrow 2\pi a$, 则 $I_1 = \int_{\overline{OA}} P dx + Q dy = \int_0^{2\pi a} \cos x dx = \sin(2\pi a)$.

4. 解: S 关于 $y = 0$ 对称, $xy + yz$ 关于 y 是奇函数, 则

$$I_2 = \iint_S z x dS = \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{(1 + z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^3 \cos \theta d\rho = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4.$$

$$5. \text{ 解: } \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

对于 $I_1 = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$, (1) $p \geq 1$ 时是定积分, 收敛; (2) $p < 1$ 时, 0 是奇点, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{p-1} e^{-x} \cdot x^{1-p} = 1$, 由柯西判别法, 当 $0 < 1 - p < 1$ 即 $0 < p < 1$ 时收敛, 当 $1 - p \geq 1$ 即 $p \leq 0$ 时发散. 由(1)(2)可知, I_1 仅当 $p > 0$ 时收敛.

对于 $I_2 = \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$, $+\infty$ 是奇点, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{p-1} e^{-x} \cdot x^2 = 0$, 所以 I_2 收敛.

综上, 原式仅当 $p > 0$ 时收敛;

二、 1. 解: $0 < u_n = \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{n^2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以原级数收敛.

2. 解: 因为数列 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ 单调减少趋于零,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{6} \right| &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left| \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{k\pi}{6} \sin \frac{\pi}{12} \right| = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left| \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{(2k-1)\pi}{12} - \cos \frac{(2k+1)\pi}{12} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left| \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{(2n+1)\pi}{12} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{12}}, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{6}$ 的部分和有界. 由狄利克莱判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}$ 收敛.

又 $\left| \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}} \right| \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{2\sqrt{n}}$. 与上面的证明类似, 可以知道级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{2\sqrt{n}}$ 收敛, 而级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散. 一个发散级数与一个收敛级数逐项相减所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}$ 必发散, 由比较判别

法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}} \right|$ 发散. 综上所述, 原级数条件收敛.

3. 解: 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1]$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{1}{3^n} = \ln(1+1) - \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \ln \frac{3}{2}.$$

4. 解: 原方程化为 $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$, 这是全微分方程, 通积分为 $x^3 + x^2y - xy^2 = C$.

5. 解: 原方程化为 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^3 \cdot y^{-2}$, 这是伯努利方程, 令 $y^3 = u$, 则原方程化为 $\frac{du}{dx} - \frac{3}{x} \cdot u = 3x^2$, 解得 $u = e^{\int \frac{3}{x} dx} \left(C + \int 3x^3 e^{-\int \frac{3}{x} dx} dx\right) = x^3(C + 3x)$, 故所求通积分为 $y^3 = x^3(C + 3x)$.

三、解: 设 S 是平面 $x + y + z = 1$ 在第一卦限的部分的上侧, 则由斯托克斯公式,

$$I_3 = -2 \iint_S z dy dz + x dz dx + y dx dy = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z) dS = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma(S) = -1.$$

四、解: 曲面 S 的方程为 $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, 其中 $(x, y) \in D$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$. 设 $S_1: z = e^a$, $(x, y) \in D$, 取上侧. $P = 4xz$, $Q = -2yz$, $R = 1 - z^2$, 则由高斯公式 $\iint_{S+S_1} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = 0$, 所以 $I_4 = - \iint_{S_1} (1 - e^{2a}) dx dy = (e^{2a} - 1) \iint_D dx dy = (e^{2a} - 1) \pi a^2$

五、解: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$, $f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n-1} = xs(x)$,

$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n-1}$, 两边积分得

$$\begin{aligned} \int_0^x s(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n-1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \\ &= x \left(4x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \right) = x(4x + f'(x)) = 4x^2 + xf'(x), \end{aligned}$$

所以 $s(x) = 8x + f'(x) + xf''(x)$, 故 $f''(x) = xs(x) = 8x^2 + xf'(x) + x^2f''(x)$,

所以 $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x) - \frac{x}{1-x^2}f'(x) = \frac{8x^2}{1-x^2}$,

这是关于 $f'(x)$ 的一阶线性微分方程, 解得

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\int \frac{x}{1-x^2} dx} \left(C_1 + \int \frac{8x^2}{1-x^2} e^{-\int \frac{x}{1-x^2} dx} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(C_1 + 8 \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(C_1 + 4 \arcsin x - 4x\sqrt{1-x^2} \right) \end{aligned}$$

由 $f'(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$, 所以 $f'(x) = 4 \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - x \right)$, 两边再积分得 $f(x) = 2(\arcsin x)^2 - 2x^2 + C_2$,

由 $f(0) = 0$ 得 $C_2 = 0$, 所以 $f(x) = 2(\arcsin x)^2 - 2x^2$

微积分 II (第一层次) 期末试卷参考答案 (2020.8.18)

一、 解: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, 所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续.

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0,$$

所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可偏导.

$$\omega = f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)x - f'_y(0, 0)y = f(x, y) = xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\omega}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho \cos \theta \sin \theta \sin \frac{1}{\rho} = 0, \text{ 所以 } f(x, y) \text{ 在 } (0, 0) \text{ 处可微.}$$

$$\text{当 } (x, y) \neq (0, 0) \text{ 时, } f'_x(x, y) = y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x^2 y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_x(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} (\rho \sin \theta \sin \frac{1}{\rho} - \cos^2 \theta \sin \theta \cos \frac{1}{\rho}) \text{ 不存在, 故 } f(x, y) \text{ 在 } (0, 0) \text{ 处不连续可微.}$$

二、 1. $9x + y - z = 27$ 或 $9x + 17y - 17z + 27 = 0$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ 解: } S &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 2a^2} \left(\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a} \right) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2^{1/2}} \left(\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2 - \rho^2}} + \frac{\sqrt{a^2 + \rho^2}}{a} \right) \rho d\rho = \frac{16}{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

$$3. I = \int_1^{+\infty} dx \int_{x^2}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + y^2} dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{y}{x^2} \Big|_{y=x^2}^{y=+\infty} dx = \frac{\pi}{4} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

三、 1. 曲线的参数方程为 $x = \cos \theta, y = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, z = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, \theta$ 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$, 则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos \theta \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 \theta) d\theta = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} - \frac{1}{2}.$$

$$2. \text{ 记 } S: x + y = R \text{ 后侧, } I = \iint_S (y + x) dy dz - (y + z) dx dy = -\frac{R}{\sqrt{2}} \iint_S dS = -\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}.$$

3. 设 $S_1: z = 0, ((x, y) \in D)$ 取下侧, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$. Ω 是 S 与 S_1 所围立体,

$$P = x^3 + az^2, Q = y^3 + ax^2, R = z^3 + ay^2, \text{ 则}$$

$$\iint_{S+S_1} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^4 \sin \varphi dr = \frac{6\pi a^5}{5},$$

$$\iint_{S_1} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = - \iint_D ay^2 dx dy = -a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^3 \sin^2 \theta d\rho = -\frac{\pi a^5}{4},$$

$$\text{所以 } I = \frac{6\pi a^5}{5} + \frac{\pi a^5}{4} = \frac{29}{20} \pi a^5$$

四、 1. 解: $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4), a_n = \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) \sim \frac{1}{3n^3},$

所以级数收敛.

2. 解: $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, a_n$ 单调减, $\frac{1}{2n} < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$ 由夹逼准则可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$ 所以由

莱布尼茨判别法可知原级数收敛; 由 $a_n > \frac{1}{2n}$ 可知原级数非绝对收敛, 故原级数条件收敛.

3. 解: 设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$, 两边积分得

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}, (|x| < 1)$$

两边求导 $S(x) = \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \frac{x+1}{(1-x)^3}, (-1 < x < 1)$. 令 $x = -\frac{1}{3}$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 \frac{1}{3^n} = \frac{9}{32}$.

4. $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos n\pi x, x \in (-\infty, +\infty)$, 取 $x = 0$ 即得 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

五、1. $\tan(1+x+y) - \sec(1+x+y) = x - 1$.

2. 原方程可以写成 $\frac{dx}{dy} - \frac{2x}{y} = -2\frac{x^2}{y^3}$, 这是一个关于 x 的伯努利方程, 通积分为 $y^2 = C e^{\frac{y^2}{x}}$.

六、 $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$.

微积分 II (第一层次) 期末试卷参考答案 (2019.6.17)

一、 1. 平面方程为 $z = \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}y - \frac{9}{4}$, $(x, y) \in D$, 其中 $D: x^2 + (y-3)^2 \leq 9$.

$$\text{则所求面积 } S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \iint_D \frac{9}{8} dx dy = \frac{9}{8} \cdot 9\pi = \frac{81}{8}\pi.$$

2. $a_n = n \arcsin \frac{\pi}{5^n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot \arcsin \frac{\pi}{5^{n+1}}}{n \cdot \arcsin \frac{\pi}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot \frac{\pi}{5^{n+1}}}{n \cdot \frac{\pi}{5^n}} = \frac{1}{5} < 1$,

所以级数收敛.

3. $x=1$ 是奇点. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \sqrt{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{2}$, 所以广义积分收敛.

4. 这是伯努利方程, 令 $y^2 = u$, 方程化为 $\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -1$, 通积分为 $y^2 = Cx - x \ln|x|$.

5. 方程化为 $(x^2 - y + 5)dx - (x + y^2 + 2)dy = 0$, 这是全微分方程, 通积分为 $\frac{x^3-y^3}{3} - xy + 5x - 2y = C$.

二、 解: 直线 L 过点 $M_0(\frac{27}{8}, -\frac{27}{8}, 0)$, 方向向量为 $(10, 2, -2) \times (1, 1, -1) = 8(0, 1, 1)$.

设切点为 (x_0, y_0, z_0) , 则法向量为 $(3x_0, y_0, -z_0)$, 切平面方程为 $3x_0x + y_0y - z_0z = 27$.

$$\text{所以 } \begin{cases} 3x_0 \cdot \frac{27}{8} + y_0 \cdot (-\frac{27}{8}) = 27, \\ (3x_0, y_0, -z_0) \cdot (0, 1, 1) = 0, \\ 3x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 27. \end{cases} \text{ 解得 } (x_0, y_0, z_0) = (3, 1, 1) \text{ 或 } (-3, -17, -17),$$

所以切平面方程为 $9x + y - z = 27$ 或 $9x + 17y - 17z = -27$.

三、 记 $P(x, y) = (x + y + 1)e^x - e^y + y$, $Q(x, y) = e^x - (x + y + 1)e^y - x$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2$

$$\int_{C+\overline{AO}} Pdx + Qdy = - \iint_D (-2) dx dy \quad (\text{其中 } D \text{ 为旋轮线的一拱与 } x \text{ 轴所围的区域})$$

$$= 2 \int_0^{2\pi a} y dx = 2 \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = 6\pi a^2,$$

$$\text{所以 } I_1 = 6\pi a^2 + \int_0^{2\pi a} ((x+1)e^x - 1) dx = 6\pi a^2 + 2\pi a(e^{2\pi a} - 1).$$

四、 方法一: 设 $S_1: z=0$, $(x^2 + y^2 \leq 1)$, 取下侧, 则

$$\iint_{S+S_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy = \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dx dy dz \quad (\text{柱坐标})$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho^2} (\rho^3 + \rho z) dz = 2\pi, \text{ 所以}$$

$$I_2 = 2\pi - \iint_{S_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy = 2\pi + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-3) dx dy = -\pi.$$

方法二: $S: z = 1 - x^2 - y^2$, $(x, y) \in D$, $D: x^2 + y^2 \leq 1$, 则

$$I_2 = \iint_D (2x^3(-z'_x) + 2y^3(-z'_y) + 3((1 - x^2 - y^2)^2 - 1)) dx dy$$

$$= \iint_D (7x^4 + 7y^4 - 6x^2 - 6y^2 + 6x^2y^2) dx dy \quad (\text{极坐标})$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (7\rho^5 \cos^4 \theta + 7\rho^5 \sin^4 \theta - 6\rho^3 + 6\rho^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\rho = -\pi.$$

五、(10分) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性; 若收敛, 求其和.

解: $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$, 令 $x = \frac{1}{k}$, 则 $\frac{1}{k+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, 取 $k = 1, 2, \dots, n-1$,

再将各式相加可得 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n + 1 < 2 \ln n$ ($n \geq 3$), 所以 $\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} < \frac{2 \ln n}{n^2}$.

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln n}{n^2} \cdot n^{\frac{3}{2}} = 0$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \ln n}{n^2}$ 收敛. 由比较判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 收敛.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2 - a_1}{3} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{n+1} - \frac{a_n}{n+2} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}, \text{ 所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1. \end{aligned}$$

六、令 $t = x^2$, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} t^{n-1}$, $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \cdot 2^n}{(2n-1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$,

所以 $R = 2$. $t = 2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 发散; 所以 $0 \leq x^2 < 2$, 收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$$\text{设 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}, \text{ 则 } \int_0^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x}{2-x^2},$$

$$\text{所以 } S(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}). \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = S(1) = 3.$$

七、 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{4\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos nx dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\text{所以 } \pi^2 - x^2 = \frac{2}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

$$\text{代入 } x = 0 \text{ 得 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \text{代入 } x = \pi \text{ 得 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{4}, \text{ 所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

八、 $y_1 - y_3 = e^{-x}$ 是对应的齐次方程的一个解, 则 $y_4 = y_2 - e^{-x} = xe^x$ 是非齐次方程的一个解,

$y_1 - y_4 = e^{2x}$ 是对应的齐次方程的另一个解. 所以 $-1, 2$ 是特征根.

二阶线性非齐次微分方程为 $y'' - y' - 2y = f(x)$, 将 $y_4 = xe^x$ 带入方程可得 $f(x) = (1-2x)e^x$.

所以微分方程为 $y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x$, 通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^x$.

微积分II（第一层次）期末试卷参考答案2018.7.3

一、1. $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2} f''(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - \frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} f'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2});$$

2. $+\infty$ 是唯一奇点. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \sqrt[3]{1+x}} \cdot x^{1+\frac{1}{n}} = 1, 1 + \frac{1}{n} > 1$, 所以原广义积分收敛。

3. 解法一: 令 $t = (x-3)^2$, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n5^n}$, $a_n = \frac{1}{n5^n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 5^n}{(n+1)5^{n+1}} = \frac{1}{5}$, 所

以 $R = 5$. $t = 5$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 发散; 所以 $0 \leq (x-3)^2 < 5$, 解得 $3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5}$, 收敛域为 $(3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5})$.

解法二: 令 $u_n = \frac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 5^n (x-3)^2}{(n+1)5^{n+1}} = \frac{(x-3)^2}{5}$, 当 $\frac{(x-3)^2}{5} < 1$ 时, 原级数绝对收敛; 当 $\frac{(x-3)^2}{5} > 1$ 时, 原级数发散; 当 $\frac{(x-3)^2}{5} = 1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 发散; 所以 $\frac{(x-3)^2}{5} < 1$, 解得 $3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5}$, 收敛域为 $(3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5})$.

4. 原方程化为 $\frac{dx}{dy} + x \cot y = \cos y$, 关于 x 是一阶线性方程, 解得

$$x = e^{-\int \cot y dy} (C + \int \cos y e^{\int \cot y dy} dy) = \frac{C}{\sin y} + \frac{\sin y}{2}.$$

$y(1) = \frac{\pi}{6}$ 代入得 $C = \frac{3}{8}$, 所以所求特解为 $8x \sin y = 3 + 4 \sin^2 y$.

5. (全微分方程, 通解为 $\sin \frac{y}{x} - \cos \frac{x}{y} + 5x - \frac{3}{y^2} = C$)

二、 设曲面 $S_1: z = 0, (x^2 + y^2 \leq a^2)$, 取下侧, 则

$$\iint_{S+S_1} (x^3 + az^2) dy dz + (y^3 + ax^2) dz dx + (z^3 + ay^2) dx dy = \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dx dy dz$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^4 \sin \varphi dr = \frac{6\pi a^5}{5}.$$

$$\iint_{S_1} (x^3 + az^2) dy dz + (y^3 + ax^2) dz dx + (z^3 + ay^2) dx dy = - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} ay^2 dx dy$$

$$= -a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^3 \sin^2 \theta d\rho = -\frac{\pi a^5}{4}. \quad \text{原式} = \frac{6\pi a^5}{5} + \frac{\pi a^5}{4} = \frac{29\pi a^5}{20}.$$

三、 设 C 所围的正六边形为 $S: x + y + z = \frac{3a}{2}$, 取上侧, 则 S 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 由斯托克斯公式,

$$I_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z) dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3a}{2} \iint_S dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 = -\frac{9}{2} a^3.$$

四、 $a_n = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n^p} = \frac{2}{n^p(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})} \sim \frac{1}{n^{p+1/2}},$

所以 $p > \frac{1}{2}$ 时绝对收敛, $-\frac{1}{2} < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 非绝对收敛。

$-\frac{1}{2} < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 原级数是交错级数, 用莱布尼茨判别法可得级数条件收敛;

$p \leq -\frac{1}{2}$ 时, 一般项不趋向于0, 级数发散.

五、 $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 14}{(x-3)^2(2x+5)} = \frac{1}{2x+5} + \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{5}(1 + \frac{2}{5}x)^{-1} + \frac{1}{9}(1 - \frac{x}{3})^{-2}$

$$(1 + \frac{2}{5}x)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-2) \cdots (-n)}{n!} (\frac{2}{5}x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{5^n} x^n, \quad x \in (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}),$$

$$(1 - \frac{x}{3})^{-2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)(-3) \cdots (-n-1)}{n!} (-\frac{x}{3})^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n, \quad x \in (-3, 3),$$

所以 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3^{n+2}} + (-1)^n \frac{2^n}{5^{n+1}} \right) x^n, \quad x \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right).$

六、 $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in [0, \pi).$

在上式中取 $x = \frac{\pi}{2}$, 得 $I = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$, 于是

$$1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \cdots = I + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \cdots = I + \frac{1}{3}I = \frac{\pi}{3}.$$

七、 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x + \frac{e^{2x}}{10}(\cos x + 2 \sin x).$

八、(1) 在 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$ 中令 $x=y=0$ 得 $f(0)=0$.

因为 $f'(0)$ 存在, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

且 $f'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y}.$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)} - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} (1 + 4f^2(x)) = f'(0)(1 + 4f^2(x)),$$

即 $f'(x) = a(1 + 4f^2(x))$, 这是一个可分离变量的方程, 解得 $f(x) = \frac{1}{2} \tan(2ax + C),$

由 $f(0) = 0$ 得 $C = 0$, 所以 $f(x) = \frac{1}{2} \tan(2ax).$

(2) $f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = -\frac{2}{x}, \quad f(x) = 2 + Cx.$

微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2017.7.4)

一、1. 由 $\begin{cases} f'_x = -(1+e^y)\sin x = 0, \\ f'_y = e^y(\cos x - 1 - y) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $P_1(2k\pi, 0), P_2((2k-1)\pi, -2), k \in \mathbb{Z}$.

$$f''_{xx} = -(1+e^y)\cos x, \quad f''_{xy} = -e^y\sin x, \quad f''_{yy} = e^y(\cos x - y - 2),$$

对于 $P_1, A = -2, B = 0, C = -1, B^2 - AC < 0, A < 0$, 所以 $f(P_1) = 2$ 是极大值;

对于 $P_2, A = 1+e^{-2}, B = 0, C = -e^{-2}, B^2 - AC > 0$, 所以 P_2 不是极值点.

2. $+\infty$ 是唯一奇点. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{\frac{4}{3}} = 1$, 所以原广义积分收敛.

3. $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln \frac{n+2}{n+1} = \frac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p} \sim \frac{1}{2pn^{\frac{p}{2}+1}}$, 仅当 $\frac{p}{2} + 1 > 1$ 即 $p > 0$ 时原级数收敛.

4. 原方程化为 $\frac{dx}{dy} - yx = y^3x^2$, 关于 x 是伯努利方程. 令 $x^{-1} = u$, 则方程化为 $\frac{du}{dy} + yu = -y^3$, 解得 $u = e^{-\int y dy} \left(C - \int y^3 e^{\int y dy} dy \right) = e^{-\frac{y^2}{2}} \left(C - 2e^{\frac{y^2}{2}} \left(\frac{y^2}{2} - 1 \right) \right)$, 故通积分为 $x \left(Ce^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2 \right) = 1$.

5. 令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx}$, 原方程化为 $\frac{dp}{dx} = 1 + p^2$, 分离变量得 $\frac{dp}{1+p^2} = dx$, 两边积分得 $\arctan p = x + C_1$, 即 $y' = \tan(x + C_1)$, 解得通解为 $y = -\ln |\cos(x + C_1)| + C_2$.

二、(1) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, 由格林公式得 $I_1 = 0$.

(2) 设曲线 $C_1: x^2 + y^2 = \varepsilon^2, 0 < \varepsilon < 0.5$, 取顺时针方向, 则

$$I_1 = \oint_{C+C_1} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} - \oint_{C_1} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0 - \oint_{C_1} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = -2\pi.$$

三、由斯托克斯公式, $I_2 = \iint_S (x+y)dydz - (y+z)dxdy$ (其中 S 为 $x+y=R$, 取后侧)

$$= - \iint_S \frac{\sqrt{2}R}{2} dS = -\frac{\sqrt{2}}{2} R \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} R \right)^2 = -\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}.$$

四、设曲面 $S: z=0, (x^2+y^2 \leq 1)$, 取上侧, 则

$$\iint_{\Sigma+S_1} xdydz + (z+1)^2 dxdy = \iiint_{\Omega} (2z+3) dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 2r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}.$$

$$I_3 = \frac{3\pi}{2} - \iint_S xdydz + (z+1)^2 dxdy = \frac{3\pi}{2} - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

五、证明: (1) 设 $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 由不等式 $n^2 > (n+1)(n-1)$ 可得,

$$(a_n)^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2} < \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2n-1)^2}{(1 \cdot 3)(3 \cdot 5) \cdots (2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}, \text{ 所以 } a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

(2) 由于 $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 由夹逼准则可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 且 $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} < a_n$,

由莱布尼茨判别法可得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 收敛.

又 $a_n = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散. 故原级数条件收敛.

六、方法一: 考虑幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} x^n$, 此幂级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

则 $\int_0^x S(x) dx = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x$, $S(x) = (xe^x)' = (x+1)e^x$. 令 $x=2$ 即得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = 3e^2$.

方法二: 注意到 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 2e^2 + e^2 = 3e^2.$$

七、因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $b_n = 0$ ($n=1, 2, \cdots$);

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x dx = \frac{2}{\pi} (-x \cos x + \sin x) \Big|_0^{\pi} = 2,$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 2x dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{n+1} \cos(n+1)x + \frac{1}{(n+1)^2} \sin(n+1)x + \frac{x}{n-1} \cos(n-1)x - \frac{1}{(n-1)^2} \sin(n-1)x \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}, \quad (n=2, 3, \cdots). \end{aligned}$$

所以 $x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} \cos nx$, $x \in (-\pi, \pi)$.

八、(1) 由题意可得 $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, 解这个微分方程得 $f(x) = -\cos x + \sin x + e^x$.

$$I_4 = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+x} df(x) - \int_0^{\pi} \frac{f(x)}{(1+x)^2} dx = \frac{f(x)}{1+x} \Big|_0^{\pi} = \frac{f(\pi)}{1+\pi} = \frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}.$$

(2) $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x) + f(x) = 6x$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, 解得 $f(x) = \cos x - 6 \sin x + 6x$.

微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2016.6.20)

- 一、 1. $0 < \left(\frac{5xy}{3(x^2+y^2)} \right)^{x^2+y^2} \leq \left(\frac{5}{6} \right)^{x^2+y^2}$, 而 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{5}{6} \right)^{x^2+y^2} = 0$, 由夹逼准则可知, 原式=0.
2. 设 $F = u^2 - v + xy$, $H = u + v^2 + x - y$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(F,H)}{D(x,v)}}{\frac{D(F,H)}{D(u,v)}} = -\frac{2vy+1}{4uv+1}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{D(F,H)}{D(u,y)}}{\frac{D(F,H)}{D(u,v)}} = \frac{2u+x}{4uv+1}$.

3. 方法1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2n-1} = \frac{1}{3} < 1$, 由达朗贝尔判别法知原级数收敛.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{3^{k-1}} - \frac{k+1}{3^{k+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n+1}{3} \right) = 1.$$

方法2: 构造幂级数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^{2n-2}$, 此幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

$$\text{则 } \int_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^2)^{n-1} = \frac{x}{1-x^2}, \quad S(x) = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}, \quad x \in (-1,1).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n-2} = \frac{1}{3} S \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 1.$$

4. 令 $y^{-2} = u$, 则原方程化为 $\frac{du}{dx} + 2u = -2x$, 通解为
- $$u = y^{-2} = e^{-\int 2dx} \left(C + \int (-2x)e^{\int 2dx} dx \right) = Ce^{-2x} - x + \frac{1}{2}.$$
5. 令 $y' = P(y)$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 原方程化为 $y \frac{dp}{dy} = p$, 分离变量积分得 $p = cy$, 即 $\frac{dy}{dx} = Cy$, 代入初值条件得 $\frac{dy}{dx} = y$, 分离变量积分得 $y = C_1 e^x$, 代入初值条件得 $y = e^x$.

二、 (1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho^3 \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\rho^2} = 0 = f(0,0),$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续;

(2) $f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0,$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

(3) 令 $f(x,y) - f(0,0) = f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \omega$, 则 $\omega = \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - x = -2\rho \cos \theta \sin^2 \theta$,

$$\frac{\omega}{\rho} = -2 \cos \theta \sin^2 \theta \not\rightarrow 0 (\rho \rightarrow 0), \text{ 所以 } f(x,y) \text{ 在 } (0,0) \text{ 处不可微.}$$

三、 $I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x^2 y^2 \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{R x^2 y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dx dy$

$$= R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}} d\rho = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_0^R \frac{\rho^5}{\sqrt{R^2-\rho^2}} d\rho$$

$$\stackrel{(\rho = R \sin t)}{=} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\theta}{8} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^5 \sin^5 t dt = \frac{2\pi R^6}{15}.$$

四、 设曲面 $S_1: z = 0, (x^2 + y^2 \leq a^2)$, 取下侧, 则

$$\begin{aligned} \iint_{S+S_1} (x^3 + az^2)dydz + (y^3 + ax^2)dzdx + (z^3 + ay^2)dxdy &= \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)dxdydz \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^4 \sin \varphi dr = \frac{6\pi a^5}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (x^3 + az^2)dydz + (y^3 + ax^2)dzdx + (z^3 + ay^2)dxdy &= - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} ay^2 dxdy \\ &= -a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^3 \sin^2 \theta d\rho = -\frac{\pi a^5}{4}. \quad \text{原式} = \frac{6\pi a^5}{5} + \frac{\pi a^5}{4} = \frac{29\pi a^5}{20}. \end{aligned}$$

五、 $|u_n| = \frac{1}{n+(-1)^n} \sim \frac{1}{n}, (n \rightarrow \infty)$, 而调和级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以原级数不绝对收敛;

$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = (-1)^n \frac{n}{n^2-1} - \frac{1}{n^2-1}$, 而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ 是莱布尼兹型的交错级数, 收敛; 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ 也收敛, 所以原级数收敛且条件收敛.

六、 $f'(x) = \frac{1}{1-x^4} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} (|x| < 1)$, 所以 $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, |x| < 1$.

七、 将 $f(x)$ 进行偶延拓, 则 $b_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$; $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}, (n = 2k-1, k = 1, 2, \dots)$$

所以 $x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x, x \in [0, \pi]$. $x = 0$ 代入上式得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S, \text{ 所以 } S = \frac{\pi^2}{6}.$$

八、 (1) $u_n(x) = \frac{x^{3n}}{(3n)!}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{3n+1}(3n)!}{|x|^{3n}(3n+3)!} = 0$, 所以收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}, S''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$, 可得微分方程 $\begin{cases} S'' + S' + S = e^x, \\ S(0) = 1, S'(0) = 0. \end{cases}$

特征方程为 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0, \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. 设特解为 $y^* = Ae^x$, 代入原方程得 $y^* = \frac{1}{3}e^x$.

$$\text{方程的通解为 } S = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \frac{1}{3}e^x.$$

由初始条件 $S(0) = 1, S'(0) = 0$ 可得 $C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = 0$, 所以 $S(x) = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x$.

($S(x)$ 满足的微分方程也可以是 $S'''(x) - S(x) = 0, S(0) = 1, S'(0) = S''(0) = 0$.)

微积分II(第一层次)期末参考答案 (2015.6.22)

一、1. 曲面 S 的方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D$, $D: x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2$,

$$\text{原式} = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \iint_D a dx dy = \pi a(a^2 - h^2).$$

$$2. \text{原式} = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 (y - x^2) dy + \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 - y) dy = \frac{46}{15}.$$

3. 记 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 5$, 则 $\mathbf{n} = (F'_x(1, 1, 1), F'_y(1, 1, 1), F'_z(1, 1, 1)) = (2, 2, 4) = 2(1, 1, 2)$, 于是曲面在 $(1, 1, 1)$ 的切平面方程为 $(x - 1) + (y - 1) + 2(z - 1) = 0$, 法线方程为 $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{2}$.

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{(x - \frac{1}{x})}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

5. 原方程可化为 $\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x} + 1}$, 这是一个齐次微分方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 于是原方程变为 $u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u + 1}$, 分离变量得 $(1 + \frac{1}{u}) du = -\frac{dx}{x}$, 两边积分, 得 $u + \ln |u| + C = -\ln |x|$, 所以原方程的通积分为: $\frac{y}{x} + \ln |y| + C = 0$. $y = 0$ 为奇解. (通积分也可写成 $y = Ce^{-\frac{y}{x}}$.)

$$6. \oint_C \arctan \frac{y}{x} dy - dx = \int_0^1 [2x \arctan x - 1] dx + \int_1^0 (\arctan 1 - 1) dx = \frac{\pi}{4} - 1.$$

$$7. S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{3}(1 - (\frac{1}{3})^n)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{7}{10}(1 - (\frac{1}{10})^n)}{1 - \frac{1}{10}} \right) = -\frac{5}{18}. \text{ 所以级数收敛, 和为 } -\frac{5}{18}.$$

8. 记 $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ 在 l 与单位圆周 $C: x^2 + y^2 = 1$ 所围的区域内成立, 故积分与路径无关, 所以 $\int_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.

9. 记 $P = e^x \sin y - 2y \sin x$, $Q = e^x \cos y + 2 \cos x$, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y - 2 \sin x$, 这是一个全微分方程, $u(x, y) = \int_0^x 0 dx + \int_0^y (e^x \cos y + 2 \cos x) dy = e^x \sin y + 2y \cos x$, 所以原方程的通解为 $e^x \sin y + 2y \cos x = C$.

10. 令 $u_n(x) = (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} x^2 = x^2$, 所以 $|x| < 1$ 时级数收敛, $|x| > 1$ 时级数发散, 而 $x = \pm 1$ 时, 易知级数收敛, 所以收敛域为 $[-1, 1]$. 设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$,

则 $S(0) = 0$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, 所以 $S(x) = S(0) + \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$, $x \in [-1, 1]$.

$$11. \text{ 在上题中令 } x = 1 \text{ 得 } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

二、 设 $S_1: z = 0$ ($x^2 + y^2 \leq a^2$), 取下侧, 记 V 是 S 与 S_1 所围立体.

$$I = \iint_S \frac{ax dy dz - 2y(z+a) dz dx + (z+a)^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iint_S \frac{ax dy dz - 2y(z+a) dz dx + (z+a)^2 dx dy}{a}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{S+S_1} \frac{ax \, dy \, dz - 2y(z+a) \, dz \, dx + (z+a)^2 \, dx \, dy}{a} - \iint_{S_1} \frac{ax \, dy \, dz - 2y(z+a) \, dz \, dx + (z+a)^2 \, dx \, dy}{a} \\
&= \iiint_V dV - \iint_{S_1} \frac{ax \, dy \, dz - 2y(z+a) \, dz \, dx + (z+a)^2 \, dx \, dy}{a} = \frac{2}{3}\pi a^3 + \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} a \, dx \, dy = \frac{5}{3}\pi a^3.
\end{aligned}$$

三、 设 $P(x, y) = 3x^2y$, 因为积分与路径无关, 所以 $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y) = 3x^2$, 故 $Q(x, y) = x^3 + \varphi(y)$.

$$\text{又因为 } \int_{(0,0)}^{(t,1)} 3x^2y \, dx + Q(x, y) \, dy = \int_0^1 Q(0, y) \, dy + \int_0^t 3x^2 \, dx = \int_0^1 Q(0, y) \, dy + t^3,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 3x^2y \, dx + Q(x, y) \, dy = \int_0^t Q(0, y) \, dy + \int_0^1 3x^2t \, dx = \int_0^t Q(0, y) \, dy + t,$$

所以 $\int_0^1 Q(0, y) \, dy + t^3 = \int_0^t Q(0, y) \, dy + t$, 两边对 t 求导得 $3t^2 = Q(0, t) + 1$, 即 $Q(0, t) = 3t^2 - 1$, 所以 $\varphi(y) = Q(0, y) = 3y^2 - 1$. 所以 $Q(x, y) = x^3 + 3y^2 - 1$.

四、 (1) 因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $b_n = 0$ ($n = 1, 2, 3 \dots$).

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \, dx = \frac{2\pi^2}{3}. \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}, (n = 1, 2, 3, \dots).$$

而 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 且 $f(-\pi) = f(\pi)$, 所以 $f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$, ($-\pi \leq x \leq \pi$).

$$(2) \text{ 在上式中令 } x = 0, \text{ 得 } \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$(3) \text{ 在(1)中令 } x = \pi, \text{ 得 } \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}, \text{ 与(2)式相加得 } \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

五、 (1) $\frac{a_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} < \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}, (n \geq 2),$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{S_k^2} < \frac{1}{S_1} + \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right) = \frac{2}{a_1} - \frac{1}{S_n} < \frac{2}{a_1},$$

而正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有界, 所以级数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

(2) 设级数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 的部分和为 σ_n , 即 $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{S_k}}, \sigma_n > \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{S_n}} > \sqrt{S_n}$, 级数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛,

则 σ_n 有上界, 由上式可知 S_n 有上界, 故级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛. $\sigma_n < \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{S_1}} = \frac{S_n}{\sqrt{a_1}},$ 若级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛,

则 S_n 有上界, 由上式可知 σ_n 有上界, 故级数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛.

六、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e - (1 + \frac{1}{x})^x}{\frac{1}{x}} = \frac{e}{2}$, 所以级数 $\sum_{n=1}^\infty \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^p$ 与级数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ 敛散性相同, $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散.

微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2014.6.23)

一、 1. 收敛域为 $(\frac{1}{e}, e)$.

$$2. I = \int_0^2 x\sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^2 \sqrt{1+4x^2} d(1+4x^2) = \frac{1}{12} (1+4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{17^{\frac{3}{2}} - 1}{12}.$$

3. 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 原方程化为 $yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$, 分离变量得 $\frac{1}{p} dp = -\frac{1}{y} dy$,
两边积分得 $p = \frac{C_1}{y}$, 即 $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y}$, 分离变量得 $y dy = C_1 dx$, 积分得 $y^2 = C_1 x + C_2$.

4. 设 $x + y = u, y - x = v, J(u, v) = \frac{1}{2}$,

$$\text{原式} = \iint_{D'} \frac{1}{2} f(u) du dv = 2 \int_0^1 du \int_0^u \frac{1}{2} f(u) dv + 2 \int_1^2 du \int_0^{2-u} \frac{1}{2} f(u) dv = \int_0^1 u f(u) du + \int_1^2 (2-u) f(u) du$$

$$(2-u=t) = \int_0^1 u f(u) du + \int_0^1 t f(2-t) dt = \int_0^1 u [f(u) + f(2-u)] du.$$

$$5. f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n, \text{ 所以 } f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1].$$

$$6. x=0, x=+\infty \text{ 是两个奇点, 原式} = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2} dx = I_1 + I_2,$$

对于 I_1 , $x=0$ 是唯一奇点, $\frac{x^p}{1+x^2} \sim x^p = \frac{1}{x^{-p}}$, 所以 I_1 仅当 $-p < 1$ 即 $p > -1$ 时收敛;

对于 I_2 , $x=+\infty$ 是唯一奇点, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2-p} \cdot \frac{x^p}{1+x^2} = 1$, 所以 I_2 仅当 $2-p > 1$ 即 $p < 1$ 时收敛;

综上, 原广义积分仅当 $-1 < p < 1$ 时收敛.

$$7. \text{ 级数的收敛域为 } [-1, 1]; \quad xI(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} = S(x),$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1), \quad S(0) = S'(0) = 0,$$

$$\text{所以 } S'(x) = S'(0) + \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x),$$

$$S(x) = S(0) - \int_0^x \ln(1-x) dx = -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x), \quad x \in [-1, 1),$$

$$I(0) = 0, \quad I(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1.$$

$$\text{所以 } I(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} \ln(1-x) - \ln(1-x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$8. \text{ 设 } S_1: z=0, x^2+y^2 \leq R^2 \text{ 取下侧, 由高斯公式 } \iint_{S+S_1} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy \\ = \iiint_{\Omega} 2(x+y+z) dx dy dz = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

所以 $I = \frac{\pi R^4}{2} - \iint_{S_1} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \frac{\pi R^4}{2}$.

二、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, x \in \mathbb{R},$ 原式 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{(n+1)!} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)!} = -2(e^{-\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{2}) = -2e^{-\frac{1}{2}} + 1$.

三、 $P = 2y, Q = x, R = e^z, S: x + y = 1$ 取左侧,

原式 $= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S -1 dx dy = 0$.

四、 曲面 S 关于 $y = 0$ 对称, $xy + yz$ 关于 y 是奇函数, 所以 $\iint_S (xy + yz) dS = 0$;

原式 $= \iint_S zx dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 2x} x \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 \cos\theta d\rho = \frac{64\sqrt{2}}{15}$.

五、 1. $b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x dx = 2, b_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 2x dx = -1$;

2. $F(a, b) = \int_0^{\pi} [f(x) - a \sin x - b \sin(2x)]^2 dx = \int_0^{\pi} [x - a \sin x - b \sin(2x)]^2 dx$
 $= \int_0^{\pi} x^2 dx + a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx + b^2 \int_0^{\pi} \sin^2 2x dx - 2a \int_0^{\pi} x \sin x dx - 2b \int_0^{\pi} x \sin 2x dx + 2ab \int_0^{\pi} \sin x \sin 2x dx$
 $= \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} a^2 + \frac{\pi}{2} b^2 - 2a\pi + b\pi = \frac{\pi}{2} [(a-2)^2 + (b+1)^2] - \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi^3}{3}$, 显然 $F(a, b)$ 在 $(2, -1)$ 处取得最小值.

六、 (1) 特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, 解得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. 设原方程有特解 $y^* = Ce^x$, 代入原方程得 $C = \frac{1}{2}$, 所以原方程的通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x$.

(2) 若 $y = f(x)$ 为 $y'' - 5y' + 6y = e^x$ 的解, 则由(1)知 $f(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

对于三阶方程 $y''' - 5y'' + 6y' = e^x$, 其特征方程为 $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$, 解得 $\lambda = 0, 2, 3$, 设此方程有特解 $y^* = Ce^x$, 代入方程得 $C = \frac{1}{2}$, 所以此三阶方程的通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 + \frac{1}{2} e^x$.

所以若 $y = f(x)$ 为 $y''' - 5y'' + 6y' = e^x$ 的解, 则 $f(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 + \frac{1}{2} e^x$, 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则 $C_3 = 0$, 所以 $f(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x, y = f(x)$ 是 $y'' - 5y' + 6y = e^x$ 的解.

七、 (1) 特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, 解得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

所以对应的齐次方程的通解为 $\tilde{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$;

设 $y^* = C_1(x) e^{2x} + C_2(x) e^{3x}$ 是原方程的解, 则 $\begin{cases} C_1'(x) e^{2x} + C_2'(x) e^{3x} = 0, \\ 2C_1'(x) e^{2x} + 3C_2'(x) e^{3x} = f(x), \end{cases}$

解得 $C_1(x) = -\int_0^x e^{-2t} f(t) dt, C_2(x) = \int_0^x e^{-3t} f(t) dt$,

原方程的通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \int_0^x (e^{3x-3t} - e^{2x-2t}) f(t) dt$.

(2) 证明: 若 $y(0) = y'(0) = 0$, 则由(1)知 $C_1 = C_2 = 0$, 从而 $y = \int_0^x (e^{3x-3t} - e^{2x-2t}) f(t) dt$.

当 $x > 0$ 时, $e^{3x-3t} - e^{2x-2t} > 0, t \in (0, x)$; 当 $x < 0$ 时, $e^{3x-3t} - e^{2x-2t} < 0, t \in (x, 0)$; 从而当 $f(x) \geq 0$ 时, $y \geq 0$.

一、 1. $\pi a(a^2 - h^2)$.

2. 解法1: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$, $2S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$,
 $S_n = 2S_n - S_n = 1 + (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}) + (\frac{5}{2^2} - \frac{3}{2^2}) + \cdots + (\frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{2n-3}{2^{n-1}}) - \frac{2n-1}{2^n}$
 $= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}$, 所以 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}) = 3$.

解法2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$,

则 $S(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^x x^{n-1} dx \right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = S(\frac{1}{2}) = 4$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 4 - 1 = 3$.

3. 令 $x+1=t$, 则原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} t^n$, $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n + (-2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3 + (-2)(-\frac{2}{3})^n}{1 + (-\frac{2}{3})^n} = 3$, 收敛半径 $R = \frac{1}{3}$.

收敛区间为 $t \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, 即 $x \in (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n + (-2)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, 两个级数都收敛, 故原级数收敛;

当 $x = -\frac{2}{3}$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$, 一个收敛一个发散, 故原级数发散;

所以级数的收敛域为 $[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

4. 原方程的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, 解之得 $\lambda = 1 \pm 2i$, 因此所求通解为 $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

5. 原方程化为 $\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x} + 1}$, 这是一个齐次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $dy = udx + xdu$, 原方程化为 $udx + xdu = \frac{u^2}{u+1}dx$, 分离变量得 $(1 + \frac{1}{u})du = -\frac{1}{x}dx$, 两边积分得 $u + \ln|u| = -\ln|x| + C$, 所以原方程的通积分为 $\frac{y}{x} + \ln|y| = C$. 另外 $y = 0$ 是奇解. (或者原方程的通积分为 $ye^{\frac{y}{x}} = C$.)

6. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x - 2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x^2 + x - 2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx$
 $= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \Big|_2^A = \frac{2}{3} \ln 2$.

7. 计算曲面积分 $\iint_S xyz dx dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分.

解法1 记 $S_1: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D_{xy}$, 取上侧; $S_2: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D_{xy}$, 取下侧; 其中 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则

$$\begin{aligned}\iint_S xyz \, dx \, dy &= \iint_{S_1} xyz \, dx \, dy + \iint_{S_2} xyz \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy - \iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1-x^2-y^2}) \, dx \, dy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho \, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\theta \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} \, d\rho = \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

解法2 曲面 S 的方程为 $x = \sqrt{1-y^2-z^2}$, $(y, z) \in D_{yz}$, $D_{yz} = \{(y, z) | y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

$$\iint_S xyz \, dx \, dy = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2} \cdot yz \cdot (-x'_z) \, dy \, dz = \iint_{D_{yz}} yz^2 \, dy \, dz = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho \cos \theta \cdot \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho \, d\rho = \frac{2}{15}.$$

8. $P = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q = \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, (x, y) \neq (0, 0)$, 令 $c: x^2+y^2=1$, 取逆时针方向, 则由格林公式可得 $\int_{l+c^-} P \, dx + Q \, dy = 0$, 所以 $\int_l \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2+y^2} = \int_c \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.

9. 设切点为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 则 $z_0 = \frac{x_0^2}{2} + y_0^2$, 点 M_0 处的法向量为 $\vec{n}_0 = (x_0, 2y_0, -1)$, 平面 $2x+2y-z=0$ 的法向量为 $\vec{n} = (2, 2, -1)$, $\vec{n}_0 // \vec{n}$, 所以 $x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = 3$, 故所求切平面方程为 $2(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0$, 即 $2x+2y-z=3$.

10. 用球坐标变换将 Ω 变为 Ω' , $\Omega': 0 \leq r \leq 4 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega'} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} r^3 \sin \varphi \cos \varphi \, dr = \frac{56}{3} \pi.$$

二、采用柱坐标变换, 则 $F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t d\rho \int_0^t f(\rho^2) \rho \, dz = 2\pi t \int_0^t f(\rho^2) \rho \, d\rho$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^5} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\pi \int_0^t f(\rho^2) \rho \, d\rho}{t^4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\pi t f(t^2)}{4t^3} = \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t^2) - f(0)}{t^2 - 0} = \frac{\pi}{2} f'(0) = \pi.$$

三、(10分) 将 $x=0$ 代入 $\int_0^x (x+1-t)f'(t) \, dt = x^2 + e^x - f(x)$, 可得 $f(0) = 1$.

$$\int_0^x (x+1-t)f'(t) \, dt = x^2 + e^x - f(x) \quad \text{化简得} \quad (x+1) \int_0^x f'(t) \, dt - \int_0^x t f'(t) \, dt = x^2 + e^x - f(x),$$

$$\text{两边对 } x \text{ 求导数得} \quad \int_0^x f'(t) \, dt + (x+1)f'(x) - x f'(x) = 2x + e^x - f'(x),$$

$$\text{即} \quad f(x) - f(0) + f'(x) = 2x + e^x - f'(x), \quad \text{化简得} \quad f'(x) + \frac{1}{2}f(x) = x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2},$$

这是一阶线性非齐次方程, 解之得 $f(x) = e^{\int -\frac{1}{2}dx} \left(C + \int \left(x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2} \right) e^{\frac{1}{2}dx} dx \right) = C e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3}e^x + 2x - 3$

又因为 $f(0) = 1$, 所以 $C = \frac{11}{3}$, 所以 $f(x) = \frac{11}{3}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3}e^x + 2x - 3$.

四、解法1 记 $P = x^2 - yz, Q = y^2 - xz, R = z^2 - xy$, 则 $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$,

$$\text{所以积分与路径无关, 取直线段 } L: \begin{cases} x = a, \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \leq z \leq h, \text{ 则} \quad \text{原式} = \int_0^h z^2 \, dz = \frac{1}{3}h^3.$$

解法2 记 $P = x^2 - yz, Q = y^2 - xz, R = z^2 - xy$, 则 $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$,

$$(x^2 - yz) \, dx + (y^2 - xz) \, dy + (z^2 - xy) \, dz = d\left(\frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz\right),$$

$$\text{原式} = \left(\frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz \right) \Big|_{(a,0,0)}^{(a,0,h)} = \frac{1}{3}h^3.$$

五、 (1) 因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $b_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$. $a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 (2+x) dx = 5$.

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 (2+x) \cos n\pi x dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 (2+x) d \sin n\pi x \\ &= \frac{2}{n\pi} (x+2) \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{2}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1], \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{5}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2} \cos(2n+1)\pi x. \quad x \in [-1, 1].$$

$$(2) \text{ 在上式中令 } x = 0, \text{ 得 } f(0) = \frac{5}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\begin{aligned} \text{六、证明: 因为 } \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_1^{[A]} f(x) dx + \int_{[A]}^A f(x) dx \right) \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{[A]-1} \int_n^{n+1} f(x) dx + \int_{[A]}^A f(x) dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{[A]}^A f(x) dx. \end{aligned}$$

要证广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 只需证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx$ 收敛, 极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{[A]}^A f(x) dx$ 存在.

因为 $\int_1^{+\infty} |f'(x)| dx$ 收敛, 所以 $\int_1^{+\infty} f'(x) dx$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty} f'(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - f(1)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \min_{x \in [[A], A]} f(x) \cdot (A - [A]) &\leq \int_{[A]}^A f(x) dx \leq \max_{x \in [[A], A]} f(x) \cdot (A - [A]), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ 故 } \lim_{A \rightarrow +\infty} \min_{x \in [[A], A]} f(x) &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \min_{x \in [[A], A]} f(x) = 0. \text{ 而 } |A - [A]| \leq 1, \text{ 由夹逼准则可} \end{aligned}$$

$$\text{知 } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{[A]}^A f(x) dx = 0.$$

$$\text{令 } a_n = \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n),$$

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n) \right| = \left| \int_n^{n+1} (f(x) - f(n)) dx \right| = \left| \int_n^{n+1} \left(\int_n^x f'(t) dt \right) dx \right| \\ &\leq \int_n^{n+1} \left(\int_n^{n+1} |f'(t)| dt \right) dx = \int_n^{n+1} |f'(t)| dt, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n \left| \int_k^{k+1} f(x) dx - f(k) \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} |f'(x)| dx = \int_1^{n+1} |f'(x)| dx \text{ 有上界,}$$

部分和数列有上界, 所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

$$\text{而 } \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + f(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \text{ 所以级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \text{ 收敛.}$$

一、 1. $\pi a(a^2 - h^2)$.

2. $P = (y - z)x, Q = 0, R = x - y$, 由高斯公式,

$$\text{原式} = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iiint_V (y - z) dV = - \iiint_V z dV = \int_0^3 z dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = -\frac{9}{2}\pi.$$

3. $\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right)$

$$S_n = \frac{1}{8} \left(\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) \right) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right), \quad \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{8}.$$

4. $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$, 所以收敛半径 $R = \frac{1}{l} = 1$. $x = 1$ 时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, 这

是莱布尼茨型的交错级数, 收敛; 当 $x = -1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$, 此级数发散, 故收敛域为 $(-1, 1]$.

5. 通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$

6. 原方程化为 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$, 这是一个齐次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 原方程化为 $u + x \frac{du}{dx} = \frac{u-1}{u+1}$, 分离变量得 $\left(\frac{u+1}{1+u^2} \right) du = -\frac{1}{x} dx$, 两边积分得 $\ln(1+u^2) + 2 \arctan u = -2 \ln|x| + \ln|C|$, 所以原方程的通积分为 $x^2 + y^2 = C e^{-2 \arctan \frac{y}{x}}$.

7. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1), \quad \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} x^n \quad (-1 \leq x < 1)$, 因此

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} x^{2n-1} \quad (-1 < x < 1),$$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \cdot \frac{\arctan x}{1+x^p} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $p > 1$ 时原广义积分收敛, $0 < p \leq 1$ 时, 原广义积分发散.

9. 方法1: 设曲线 C 的参数方程为 $x = a \sin \theta \cos \theta, y = a \sin^2 \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$, 则

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_0^\pi \sqrt{a^2 \sin^2 \theta} \sqrt{a^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 + 4a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi a \sin \theta \sqrt{a^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2} d\theta = \int_0^\pi a^2 \sin \theta d\theta = 2a^2. \end{aligned}$$

方法2: 设曲线 C 的参数方程为 $x = \frac{a}{2} \cos \theta, y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$, 则

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{2} (1 + \sin \theta)} \sqrt{\frac{a^2}{4} \sin^2 \theta + \frac{a^2}{4} \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{a^2}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2} d\theta = \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta + \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(-\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = 2a^2. \end{aligned}$$

10. 采用柱坐标, 原式 $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{2\rho}^2 \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho dz = \frac{\pi}{10}$.

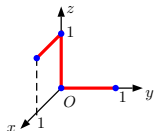
二、 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, 所以 $\left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)^p = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^p \sim \frac{1}{6^p n^{3p}}$, 所以原式当 $3p > 1$ 即 $p > \frac{1}{3}$ 时收敛, 当 $3p \leq 1$ 即 $p \leq \frac{1}{3}$ 时发散.

三、 $P = (x^2 - f(x))y + \frac{1}{2}g(x)y^2$, $Q = f(x)y - g(x)$, $R = 1$, 积分与路径无关的充要条件是

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \text{即 } f'(x)y - g'(x) = x^2 - f(x) + g(x)y, \text{ 整理得}$$

$$(f'(x) - g(x))y = g'(x) - f(x) + x^2 \quad \text{此式对所有的 } x, y \text{ 都成立, 必有 } f'(x) - g(x) = 0, g'(x) - f(x) + x^2 = 0.$$

整理得 $f''(x) - f(x) = -x^2$, 这是二阶非齐次线性常系数微分方程, 且有初始条件 $f(0) = 0, g(0) = f'(0) = 0$, 解得 $f(x) = -e^{-x} - e^x + x^2 + 2, g(x) = f'(x) = e^{-x} - e^x + 2x$.



因为积分与路径无关, 沿如图所示折线积分, 可得

$$\text{原式} = \int_0^1 0 dy + \int_0^1 dz + \int_0^1 0 dx = 1.$$

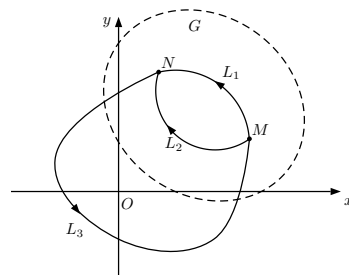
四、 1. 显然 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x)$ 连续. 所以 $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - x^2) dx = \frac{4}{3}\pi^2$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - x^2) \cos nx dx = (-1)^{n+1} \frac{4}{n^2}, \quad \text{故 } f(x) = \pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n^2} \cos nx, \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

在上式中分别令 $x = 0, x = \pi$ 可得 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

五、 证明: (1) 如图所示, 设 M, N 是 G 内任意两点, L_1, L_2 是 G 内连接 M, N 的任意两条曲线, 只需要证明

$$\int_{L_1} \frac{1}{f(x) + 8y^2} (x dy - y dx) = \int_{L_2} \frac{1}{f(x) + 8y^2} (x dy - y dx)$$



取 L_3 为连接 M, N 的曲线, 使得 $L_1 + L_3$ 为包围原点的简单闭曲线, 则 $L_2 + L_3$ 也是包围原点的简单闭曲线, 据题意可知

$$\int_{L_1 + L_3} \frac{1}{f(x) + 8y^2} (x dy - y dx) = \int_{L_2 + L_3} \frac{1}{f(x) + 8y^2} (x dy - y dx) = A,$$

$$\text{所以 } \int_{L_1} \frac{1}{f(x) + 8y^2} (x dy - y dx) = \int_{L_2} \frac{1}{f(x) + 8y^2} (x dy - y dx).$$

(2) $P = \frac{-y}{f(x) + 8y^2}, Q = \frac{x}{f(x) + 8y^2}$, 因为积分和路径无关, 所以 $Q'_x = P'_y$, 即

$$\frac{8y^2 - f(x)}{(f(x) + 8y^2)^2} = \frac{f(x) + 8y^2 - xf'(x)}{(f(x) + 8y^2)^2},$$

可得 $xf'(x) = 2f(x)$, 分离变量解得 $f(x) = Cx^2$, 又 $f(1) = 1$, 所以 $f(x) = x^2$.

取 $l: x^2 + 8y^2 = \varepsilon^2$, 即 $x = \varepsilon \cos \theta, y = \frac{1}{\sqrt{8}}\varepsilon \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则

$$A = \int_L \frac{1}{x^2 + 8y^2} (x dy - y dx) = \int_l \frac{1}{x^2 + 8y^2} (x dy - y dx) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{8}} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

六、见教材163页例7.6.6.